Поступающим в вузы

П. Т. ДЫБОВ
В. А. ОСКОЛКОВ

ЗАДАЧИ по МАТЕМАТИКЕ

(с указаниями и решениями)

Москва
ОНИКС
Мир и Образование
2006

УДК 51(076.2)
ББК 22.1я721
Д87

Дыбов П. Т.

Д87 Задачи по математике (с указаниями и решениями) / П. Т. Дыбов, В. А. Осколков. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2006. — 464 с.: ил. — (Поступающим в вузы).

ISBN 5-488-00573-0 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 5-94666-317-8 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Книга содержит более 3000 задач по всем разделам школьного курса математики, а также не входящим в программу средней школы, но часто предлагаемым на вступительных экзаменах в вузы. Большинство задач сборника в разные годы предлагалось на вступительных экзаменах по математике в ведущих вузах России и ближнего зарубежья.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения и примеры решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения. В конце книги даны ответы и методические указания, а к наиболее трудным задачам — подробные решения.

Сборник предназначен для школьников старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей подготовительных курсов.

УДК 51(076.2)
ББК 22.1я721

ISBN 5-488-00573-0
(ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 5-94666-317-8
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)

© Дыбов П. Т., Осколков В. А., 2006
© Оформление обложки.
ООО «Издательство Оникс», 2006

Предисловие

Данный сборник содержит более 3000 задач по всем разделам школьного курса математики. В него также включены разделы, не входящие в программу средней школы, но необходимые при сдаче вступительного письменного экзамена по математике в университеты, технические и педагогические вузы России, а именно в те вузы, которые предъявляют высокие требования к поступающим.

Большинство задач сборника в разные годы предлагалось на вступительных экзаменах по математике в ведущих вузах нашей страны и ближнего зарубежья.

Пособие состоит из 11 глав, которые имеют одинаковую структуру. В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения и примеры решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения, к которым в конце книги даны ответы. Часть из них сопровождается методическими указаниями, а наиболее трудные — подробными решениями. Сложные задачи иллюстрируются графиками и чертежами, что способствует развитию у учащихся как аналитических, так и пространственных навыков.

В книге приняты следующие обозначения: задачи, к которым даны решения, отмечены знаком ▲; задачи, которые сопровождаются методическими указаниями, — знаком ●.

Сборник предназначен для школьников старших классов, учащихся математических и физико-математических лицеев. Пособие также полезно слушателям и преподавателям подготовительных курсов при высших учебных заведениях и абитуриентам, самостоятельно готовящимся к вступительным экзаменам в вуз.

Авторы

Глава I

Алгебраические уравнения и неравенства. Функции одной переменной

§ 1. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Модуль действительного числа. **Определение.** *Модулем* (*абсолютной величиной*) действительного числа a называют число, равное:

1) числу a при $a > 0$;

2) нулю при $a = 0$;

3) числу $-a$ при $a < 0$.

Модуль любого числа есть число неотрицательное.

Модуль числа a обозначают $|a|$. С помощью этого обозначения модуль действительного числа a можно записать следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Так как при $a = 0$ имеем $|a| = 0 = a = -a$, то определение модуля действительного числа можно также записать в одной из следующих форм:

$$1)\ |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0, \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\ |a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ -a & \text{при } a \leqslant 0. \end{cases}$$

1. Докажите справедливость неравенства $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

2. ▲ Докажите, что при $a > 0$ неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$ (при $a \geqslant 0$ неравенство $|x| \leqslant a$ равносильно двойному неравенству $-a \leqslant x \leqslant a$).

3. Докажите, что для того чтобы число x удовлетворяло неравенству $|x| > a$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло одному из двух неравенств: $x > a$, $x < -a$.

4. Докажите, что неравенство $|a| < |b|$:

а) равносильно неравенству $-b < a < b$, если $b > 0$;

б) равносильно неравенству $b < a < -b$, если $b < 0$.

5. ▲ Докажите, что $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

6. ▲ Докажите, что $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

7. Докажите, что: а) $|xy| = |x| \cdot |y|$; б) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

8. ▲ Докажите, что:

а) если a и b имеют одинаковые знаки, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2,$$

причем равенство выполняется лишь при $a = b$;

б) если a и b имеют разные знаки, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant -2,$$

причем равенство выполняется лишь при $a = -b$.

Иначе говоря, для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geqslant 2,$$

причем знак равенства имеет место лишь при $a = \pm b$.

9. Решите уравнение:

а) $ax = x^2$; б) $(a - 2)x = a^2 - 4$; в) $(a^2 - 9)x = a^2 + 27$.

10. Решите неравенство:

а) $-4x > 5$; б) $5x + 6 \leqslant 3x - 8$; в) $ax \leqslant 1$; г) $ax > 1$.

11. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x > 1, \\ -x < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x < \pi, \\ -x > -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > -1, \\ 2x + 1 \leqslant 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2 \geqslant 0, \\ x + \sqrt{5} < 0. \end{cases}$

12. Найдите значения $x \in \boldsymbol{N}$, удовлетворяющие неравенству

$$5x - 7 < 2x + 8.$$

Решите уравнение:

13. а) $|x - 1| = 3$; б) $|x + 2| = -1$; в) $|3 - x| = a$; г) $|x - a| = 2$.

14. а) $|x - 3| = x - 3$; б) $|x - 3| = 3 - x$; в) $|x - 3| = x$.

15. ▲ а) $|2x - 1| = |x + 3|$; б) $|x - a| = |x - 4|$.

16. ▲ а) $|x - 4| + |x + 4| = 9$; б) $|x - 4| + |x + 4| = 8$;

в) $|x - 4| - |x + 4| = 8$; г) $|x + 4| - |x - 4| = 8$.

17. $|x - 3| + |x + 2| - |x - 4| = 3$.

18. При каких значениях a уравнение $|2x + 3| + |2x - 3| = ax + 6$ имеет более двух корней?

Решите неравенство:

19. ▲ а) $|x| > a$; б) $|x - 1| > -1$; в) $|x - 1| > 1$.

20. ▲ а) $|x| < a$; б) $|x + 2| \leqslant -2$; в) $|x + 2| < 2$.

21. а) $|2x + 1| > x$; б) $|2x + 3| \leqslant 4x$.

22. а) $|1 - 3x| - |x + 2| \leqslant 2$; б) $|x + 2| + |x - 3| > 5$.

23. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x| \geqslant x, \\ 2x - 1 > 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| \leqslant -x, \\ |x + 2| > 1. \end{cases}$

24. При каком значении a функция $f(x) = (a - 2)x + 3a - 4$, $x \in (-\infty; +\infty)$, является: а) четной; б) нечетной?

25. При каком значении a функция $f(x) = (a + 3)x + 5a$, $x \in (-\infty; +\infty)$, является периодической?

26. Найдите значения k, при которых функция $f(x) = (k - 1)x + k^2 - 3$, $x \in (-\infty; +\infty)$: а) монотонно возрастает; б) монотонно убывает.

27. Определите значения m, при которых функция $y = (m^2 - 4)x + |m|$, $x \in (-\infty; +\infty)$, имеет обратную функцию. Найдите эту функцию.

28. ● Дана линейная функция $f(x)$. Докажите, что функция $F(x) = f(f(x))$ также является линейной.

Уравнение прямой в прямоугольной системе координат на плоскости. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат xOy.

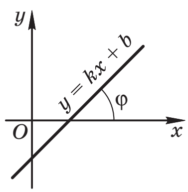


Рис. 1

Тогда уравнение прямой (рис. 1), не параллельной оси Oy (для краткости будем называть ее наклонной прямой), имеет вид

$$y = kx + b,\ k = \operatorname{tg} \varphi,$$

где $\operatorname{tg} \varphi$ — угловой коэффициент прямой, φ — угол между прямой и положительным направлением оси Ox, b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy;

уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $x = x_0$ на оси Ox, имеет вид

$$x = x_0, \quad \text{или} \quad x - x_0 = 0;$$

уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку $y = y_0$ на оси Oy, имеет вид

$$y = y_0, \quad \text{или} \quad y - y_0 = 0.$$

Если наклонные прямые $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны: $k = k_1$. Если же эти наклонные прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_1 = -\frac{1}{k}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, записывают в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

а уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, — в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Если функция $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ записывают в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0),$$

а уравнение нормали (т. е. прямой, перпендикулярной касательной) к графику функции $y = f(x)$ в этой точке имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0).$$

Постройте график функции:

29. а) $y = 2x$; б) $y = -\frac{1}{3}x$.

30. а) $y = x - 2$; б) $y = 3 - x$.

31. а) $y = 2x - 1$; б) $y = 1 - 3x$.

32. а) $y = |x - 1|$; б) $y = -|x + 2|$.

33. а) $y = |1 + 2x|$; б) $y = -|-4x + 2|$.

34. $y = ||x - 1| - 2|$.

35. $y = |x + 2| + |x - 3|$.

36. $y = |2x + 1| - |2x - 2|$.

37. $y = x + \frac{x}{|x|}$.

38. $y = x + |x - 1| + \frac{|x - 2|}{x - 2}$.

Постройте график уравнения:

39. $\frac{y}{x+1} = -1$.

40. $|y| + x = -1$.

41. $|x| + |y| = 2$.

42. $|y - 3| = |x - 1|$.

На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие неравенству:

43. $y > x$.

44. $y < -x$.

45. $y \geqslant |x|$.

46. $x > |y|$.

На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие уравнению:

47. $y + |y| - x - |x| = 0$. **48.** $|x + y| + |x - y| = 4$.

49. $|y|x = x$. **50.** $|x - y| + y = 0$.

51. ▲ Найдите значение a, при котором функция y непрерывна в точке $x = 0$, если

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{при } x \leqslant 0, \\ -x + a & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Дифференцирование. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в области $D \subset \boldsymbol{R}$ и дифференцируемы в этой области, то производную их произведения находят по формуле

$$(uv)' = u'v + v'u$$

в точках $x \in D$, а производную их частного — по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

в точках $x \in D$, где $v(x) \neq 0$.

52. Найдите критические точки функции:

▲ а) $y = |3x + 1|$; ▲ б) $y = |x + 1| + x + 1$;

в) $y = |x + 1| + |x - 1|$; г) $y = |x - 3| - |x + 3|$.

Найдите интервалы монотонного возрастания и убывания функции:

53. а) $y = 3 - x$; б) $y = \frac{1}{x}x + 1$.

54. а) $y = 2 + |x - 4|$; б) $y = 3 - |x|$.

55. а) $y = -(|x + 10| + |x - 10|)$; б) $y = |x - 4| - |x + 5|$;

в) $y = |x + 4| - |x + 3| + |x + 2| - |x + 1| + |x|$.

Производные элементарных функций

1. $C' = 0$, $C = \text{const}$.

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $x > 0$, при $\alpha \in \boldsymbol{R}$; $x \in \boldsymbol{R}$ при $\alpha = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $(e^x)' = e^x$. **4.** $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$. **6.** $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, $|x| \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

7. $(\sin x)' = \cos x$. **8.** $(\cos x)' = -\sin x$.

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

13. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Если аргумент функции, приведенной в таблице, является функцией, дифференцируемой в области $D \in \boldsymbol{R}$, то производные сложных функций находят по правилам:

1. $(c\, f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c = \mathrm{const}$.

2. $[(f(x))^{\alpha}]' = \alpha(f(x))^{\alpha-1} \cdot f'(x)$, $f(x) > 0$ при $\alpha \in \boldsymbol{R}$; $f(x) \in \boldsymbol{R}$ при $\alpha = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

4. $(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$.

6. $(\log_a |f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$, $f(x) \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

7. $(\sin f(x))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$.

8. $(\cos f(x))' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$.

9. $(\mathrm{tg}\, f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$, $f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

10. $(\mathrm{ctg}\, f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$, $f(x) \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

11. $(\arcsin f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$, $|f(x)| < 1$.

12. $(\arccos f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$, $|f(x)| < 1$.

13. $(\mathrm{arctg}\, f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$.

14. $(\mathrm{arcctg}\, f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$.

Найдите точки экстремума функции:

56. а) $y = |2x - 1|$; б) $y = 2 - |3 - 4x|$.

57. ● а) $y = |3x + 2| + |2x - 3|$; ● б) $y = |x + 7| - 2|x - 2|$.

58. $y = 2|x - 1| - 3|x + 2| + x$.

59. ▲ $y = |x - 2| + |x - a|$.

60. Дана функция $y = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x < 2, \\ a & \text{при } x = 2, \\ 5 - x & \text{при } x > 2. \end{cases}$

Найдите значения a, при которых эта функция имеет максимум в точке $x = 2$.

61. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = |x - a|$ на отрезке $[1;\ 2]$ ($a \neq 1$; $a \neq 2$).

Решите уравнение:

62. ▲ а) $|4x - |x - 1| + 7| = 16$; б) $|3x + |x - 2| + 8| = 15$; в) $|2x + |x + 1| - 6| = 12$; г) $|x - |x + 2| + 5| = 13$.

63. ▲ а) $|x - 2| + |3 - x| = 1$; б) $|4x - 3| + |5 - 4x| = 2$; в) $|1 - 2x| + |4 - 2x| = 3$; г) $|3x - 4| + |8 - 3x| = 4$.

Решите неравенство:

64. ▲ а) $|9 - 2x| - |2 - 3x| \geqslant 1$; б) $|7 - 4x| - |1 - 3x| \leqslant 1$; в) $|8 - 3x| - |1 - 5x| \geqslant 1$; г) $|2 - 4x| - |3 - 2x| \leqslant 1$.

65. ▲ а) $|x + 2| > ||2x - 1| - 6| - 1$; б) $4||x - 1| - 5| - |x + 1| \leqslant 1$; в) $1 + 3||x + 2| - 4| \leqslant 2|x - 3|$; г) $|x - 2| - |4 - 3|x + 1|| \geqslant 1$.

§ 2. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) называют *квадратным*. Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения. Если $D \geqslant 0$, то уравнение имеет два действительных корня:

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то корни совпадают: $x_{1,\,2} = -\frac{b}{2a}$; если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней. Корни квадратного уравнения связаны с его коэффициентами соотношениями

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ называют *приведенным*.

ТЕОРЕМА ВИЕТА. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:*

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Если $D = p^2 - 4q \geqslant 0$, то приведенное квадратное уравнение имеет два действительных корня $x_{1,\,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$; если $D = 0$, то корни совпадают: $x_{1,\,2} = -\frac{p}{2}$; если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Корнями уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ при $D \geqslant 0$ являются числа

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

а корнями уравнения $x^2 + 2px + q = 0$ — числа $x_{1,\,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$.

Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится в точке с координатами $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Пусть $x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ и $x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ — корни приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами, дискриминант $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Тогда справедливы ТЕОРЕМЫ:

1. Если в уравнении (1) $p > 0$, $q > 0$, то его корни связаны неравенствами $x_1 < x_2 < 0$.

2. Если в уравнении (1) $p < 0$, $q > 0$, то его корни связаны неравенствами $0 < x_1 < x_2$.

3. Если в уравнении (1) $p > 0$, $q < 0$, то его корни связаны неравенствами $x_1 < 0 < x_2$.

4. Если в уравнении (1) $p < 0$, $q < 0$, то его корни связаны неравенствами $x_1 < 0 < x_2$.

5. Если в уравнении (1) $p > 0$, $q = 0$, то его корни связаны соотношениями $x_1 < x_2 = 0$.

6. Если в уравнении (1) $p < 0$, $q = 0$, то его корни связаны соотношениями $0 = x_1 < x_2$.

7. Если в уравнении (1) $p = 0$, $q < 0$, то его корни связаны неравенствами $x_1 < 0 < x_2$.

1. Решите уравнение:

а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $-x^2 + 4x + 5 = 0$;

в) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; г) $3x^2 + 10x + 3 = 0$;

д) $x^2 - 2x - 5 = 0$; е) $2x^2 + x - 8 = 0$.

2. Решите неравенство:

а) $x^2 - 3x - 4 > 0$; б) $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$;

в) $x^2 + 4x + 4 > 0$; г) $4x^2 + 4x + 1 \leqslant 0$;

д) $2x^2 - x + 5 > 0$; е) $x^2 - x + 1 < 0$.

3. Найдите решения системы:

а) $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \\ x - 2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0, \\ x - 4 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geqslant 0, \\ x^2 - 25 \leqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + 6x + 9 \leqslant 0, \\ 2x - 5 > 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + x + 8 < 0, \\ x^2 + 6x + 5 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} |x - 2| + |x - 3| = 1, \\ 813x - 974 \leqslant 163x^2. \end{cases}$

4. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x - 7 = 0$. Не решая уравнение, найдите: ● а) $x_1^2 + x_2^2$; ● б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $x_1^4 + x_2^4$.

5. Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — попарно различные действительные корни этого уравнения, то $a = b = c = 0$.

6. При каких значениях a уравнение

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0$$

имеет более двух корней?

7. Уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{Z}$, имеет рациональные корни. Докажите, что эти корни — целые числа.

8. Докажите, что уравнение $x^2 + (2m + 1)x + 2n + 1 = 0$ не имеет рациональных корней, если $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

9. ● При каких значениях a корни уравнения $2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4a = 0$ имеют разные знаки?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

11. ▲ При каких значениях k уравнение $x^2 + 2(k - 1)x + k + 5 = 0$ имеет хотя бы один положительный корень?

12. Найдите все значения m, при которых оба корня уравнения $2x^2 + mx + m^2 - 5 = 0$: ▲ а) меньше 1; б) больше -1.

13. Найдите все значения k, при которых один корень уравнения $x^2 - (k + 1)x + k^2 + k - 8 = 0$ больше 2, а другой корень меньше 2.

14. ▲ Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 2(k - 3)x + 9 = 0$ $(x_1 \neq x_2)$. При каких значениях k будут выполнены неравенства $-6 < x_1 < 1$ и $-6 < x_2 < 1$?

15. Найдите все значения k, при которых один корень уравнения $(k - 5)x^2 - 2kx + k - 4 = 0$ меньше 1, а другой корень больше 2.

16. При каких значениях m неравенство $mx^2 - 9mx + 5m + 1 > 0$ выполняется для любого $x \in \boldsymbol{R}$?

17. Найдите все значения m, при которых всякое решение неравенства $1 \leqslant x \leqslant 2$ является решением неравенства $x^2 - mx + 1 < 0$.

Решите уравнение:

18. ▲ а) $x^2 - |x| - 2 = 0$; б) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$.

19. а) $2x^2 - |5x - 2| = 0$; б) $x^2 - |x - 1| = 0$.

20. а) $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$; б) $|6x^2 - 5x + 1| = 5x - 6x^2 - 1$; в) $|x^2 + x| = x^2 + x$; г) $|x^2 - x + 5| = x - x^2 - 5$.

21. а) $|x^2 - 1| = x + 3$; б) $|x^2 - 1| = |x + 3|$.

22. а) $|2x^2 - 1| = x^2 - 2x - 3$; б) $|2x^2 - 1| = |x^2 - 2x - 3|$.

23. $|x^2 - 3|x| + 2| = x^2 - 2x$.

Решите неравенство:

24. ▲ а) $x^2 - |x| - 12 < 0$; б) $x^2 + 2|x| - 15 \geqslant 0$; в) $x^2 - 7|x| + 10 \leqslant 0$; г) $8x^2 + |-x| + 1 > 0$; д) $4x^2 + 2|x| + 0{,}25 < 0$.

25. а) $3x^2 - |10x - 3| > 0$; б) $x^2 \leqslant |x - 2|$.

26. а) $|x^2 + x - 20| \leqslant x^2 + x - 20$; б) $|x - 2x^2| > 2x^2 - x$; в) $|x^2 + 6x + 8| \leqslant -x^2 - 6x - 8$.

27. а) $|x^2 - 6| > 4x + 1$; б) $|x - 3| > |x^2 - 3|$.

28. а) $|2x^2 - x - 10| > |x^2 - 8x - 22|$; б) $|x^2 - 5|x| + 4| \geqslant |2x^2 - 3|x| + 1|$.

29. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{-x^2}$; б) $y = x - \sqrt{1 - x^2}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}$; д) $y = \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{x^2 + x}$; е) $y = \sqrt{x^2 - |x|} + \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

30. Докажите, что функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ не является периодической.

31. При каких значениях a функция $f(x) = -x^2 + (a - 1)x + 2$ монотонно возрастает на интервале $(1; 2)$?

32. Найдите функцию, обратную функции $f(x) = x^2 - 6x + 1$ на интервале: а) $(-\infty; 3)$; б) $(5; 7)$.

Постройте график функции:

33. а) $y = x^2$; б) $y = (x - 2)^2$;

в) $y = 2(x - 2)^2$; г) $y = 2(x - 2)^2 - 1$.

34. а) $y = -x^2$; б) $y = -(x + 1)^2$;

в) $y = -0{,}5(x + 1)^2$; г) $y = 2 - 0{,}5(x + 1)^2$.

35. а) $y = x^2 + 5x + 6$; б) $y = 4x^2 + 4x + 1$;

в) $y = x^2 + x + 1$.

36. а) $y = 3x - x^2 - 2$; б) $y = 2x - x^2 - 1$;

в) $y = x - x^2 - 1$.

37. а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; б) $y = x^2 + 4|x| + 3$;

в) $y = 2 - |x| - x^2$.

38. а) $y = |x^2 + x|$; б) $y = -|x^2 - 2x|$.

39. а) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$; б) $y = -|x^2 - |x| - 6|$.

40. а) $y = |x|(x - 2)$; б) $y = (3 - x)|x + 1|$.

41. $y = |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$.

42. Найдите производную функции:

а) $y = x^2 - 6x + 15$; б) $y = -x^2 - x + \sqrt{5}$;

в) $y = 3x^2 + x + \sin 1$; г) $y = -4x^2 - (\operatorname{tg} 2)x + \pi$;

д) $y = \frac{1}{2}x^2 - x\sqrt{3} + 2^{\sqrt{2}}$; е) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \pi x + \operatorname{arctg} 4$;

ж) $y = (5x + 1)^2$; з) $y = -(0{,}5x - 4)^2$;

и) $y = ax^2 + |a|$; к) $y = (a - 1)x^2 - ax$.

43. В указанной точке x_0 найдите значение производной функции:

а) $y = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 1$; б) $y = -x^2 + 3x$, $x_0 = -2$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 - x$, $x_0 = 1$; г) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$, $x_0 = 0$.

44. В указанной точке x_0 определите угол между осью абсцисс и касательной к кривой:

а) $y = 2x^2 + x$, $x_0 = 2$; б) $y = -x^2 + 2x$, $x_0 = 3$; в) $y = \frac{x^2}{2} + x\sqrt{3}$, $x_0 = 0$; г) $y = 2x - x^2$, $x_0 = 1{,}5$; д) $y = 3x + 4x^2$, $x_0 = -2$.

45. В указанной точке $M\ (x_0;\ y_0)$ составьте уравнение касательной к параболе:

а) $y = 3x^2 - 6x + 1$, $M(0;\ 1)$; б) $y = -0{,}5x^2 - 4x + 3$, $M(-1;\ 6{,}5)$;

в) $y = x^2 - 4x + 8$, $M(-2;\ 4)$.

46. При каком значении a касательная к параболе $y = ax^2 + x - 3$ в точке $M(1;\ a - 2)$ параллельна прямой $y = 2x - 1$?

47. ▲ На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = a$, $x_2 = 3a$, $a \neq 0$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

48. Составьте уравнение такой касательной к параболе $y = -2x^2 + 16x - 31$, которая параллельна оси абсцисс.

49. Составьте уравнение такой касательной к параболе $y = 2x^2 + 8x$, которая перпендикулярна оси ординат.

50. При каких значениях k касательная к параболе $y = 4x - x^2$ в точке $M(1; 3)$:

а) является касательной к параболе $y = x^2 - 6x + k$;

б) пересекает параболу $y = x^2 - 6x + k$ в двух точках?

Найдите критические точки функции:

51. а) $y = x^2 - 6x + 1$; б) $y = -x^2 + 4x - 3$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x$; г) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2{,}5x - \frac{1}{3}$.

52. а) $y = x^2 - |x|$; б) $y = -2x^2 + |x + 3|$.

53. а) $y = |x^2 - 6x + 5|$; б) $y = -|4x + x^2|$;

в) $y = |x^2 + 2x + 6|$.

54. а) $y = |x^2 - 4| + |x + 3|$; б) $y = |x^2 - 1| + |x^2 - 3|$.

55. а) $y = x|2 - x|$; б) $y = (x - 5)\,|x - 1|$;

в) $y = -(x - 2)\,|x - 2|$.

56. Определите интервалы монотонного убывания функции:

а) $y = x^2 - 3x + 1$; б) $y = -x^2 - 4x + 8$;

в) $y = 0{,}5x^2 - |x|$; г) $y = |0{,}5x^2 - |x||$.

57. Определите интервалы монотонного возрастания функции:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 - x - \sqrt{2}$; б) $y = -2x^2 + 8x - 3$;

в) $y = |x - 4| - x^2$; г) $y = ||x - 4| - x^2|$.

Определите точки экстремума функции:

58. а) $y = x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = (x - 1)^2$;

г) $y = -(2 + x)^2$; д) $y = x^2 + 2x + 100$; е) $y = -4x^2 + x - 5$.

59. а) $y = x|x|$; б) $y = |2x + 3|^2$; ▲ в) $y = (x - 2)|x + 1|$.

60. а) $y = x^2 - 3|x| + 2$; б) $y = x^2 + 3|x| + 2$;

в) $y = x^2 - |x - 1| + 3$.

61. а) $y = |x^2 - 6|x| + 8|$; б) $y = |x^2 - |x - 2| - 14|$.

62. а) $y = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$; б) $y = |x^2 - 4| + |x^2 - 25|$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке:

63. а) $y = 3x^2 - x + 5$ на отрезке $[1; 2]$;

б) $y = -4x^2 + 5x - 8$ на отрезке $[2; 3]$;

в) $y = x^2 - 2x + 5$ на отрезке $[-1; 2]$;

г) $y = -x^2 + 6x - 1$ на отрезке $[0; 4]$.

64. а) $y = x^2 + |x + 2|$ на отрезке $[-3; -1]$;

б) $y = (x - 3)\,|2 - x|$ на отрезке $[1; 4]$;

в) $y = |x^2 - 4|x||$ на отрезке $[-1; 3]$.

65. ● Пусть x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$ — нули функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что существует такая точка $x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю.

66. ● Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ задана на отрезке $[x_1; x_2]$, причем $f(x_1) = f(x_2) = A$, $x_1 \neq x_2$. Докажите, что найдется такая точка $x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю.

67. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ задана на отрезке $[x_1; x_2]$. Докажите существование точки $x_0 \in (x_1; x_2)$ такой, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\,(x_2 - x_1)$. Определите абсциссу точки x_0.

68. Решите неравенство:

▲ а) $|x^2 - 3|x - 1|| < x + 2$; б) $|x^2 + 2|x - 3|| \geqslant 4x + 5$;

в) $x + |x^2 - 2|2x + 1|| < 0{,}25$; г) $2x - |0{,}5^2 - |1 - 6x|| \leqslant 3$.

69. Пусть x_1 и x_2 — корни заданного квадратного уравнения, удовлетворяющие указанному условию. Найдите значение параметра, если:

▲ а) $x^2 + 5x + c = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 13$;

б) $x^2 + x + a = 0,\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$;

в) $x^2 + px - 5 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 11$;

г) $x^2 + bx - 1 = 0,\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 4$.

70. Найдите все значения параметра, при которых заданное уравнение имеет решение на указанном интервале:

▲ а) $x^2 - 2ax + 8a - 15 = 0$, $(1; +\infty)$;

б) $x^2 + 2bx + 6b - 8 = 0$, $(-\infty; -1)$;

в) $x^2 - 2cx + 5c - 4 = 0$, $(0; +\infty)$;

г) $x^2 + 2dx + 7d - 12 = 0$, $(-\infty; 0)$.

71. Найдите значения параметра, при которых:

▲ а) один из корней уравнения $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$ в 2 раза больше другого;

б) отношение корней уравнения $px^2 - (p + 3)x + 3 = 0$ равно 1,5;

в) отношение корней уравнения $x^2 + bx + b + 2 = 0$ равно 2;

г) один из корней уравнения $x^2 - (3c + 2)x + c^2 = 0$ в 9 раз больше другого.

72. Найдите все значения параметра, при которых уравнение:

▲ а) $2x^2 - (\sqrt{a^2 - 1})x + a = 0$ имеет два различных положительных корня;

б) $3x^2 + \sqrt{c^2 - 3c + 2x} + 3c = 0$ имеет корни, знаки которых противоположны;

в) $0{,}5x^2 + \sqrt{p^2 - 5p + 6x} + 2p = 0$ имеет два различных отрицательных корня;

г) $x^2 + \sqrt{q^2 - 5q + 4x} - q + 2 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

73. Найдите все значения параметра, при которых данное неравенство справедливо для всех действительных значений x, кроме, быть может, указанного значения x_0. Решите задачу, если:

▲ а) $(a - 3)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$, $x_0 = 2$;

б) $(2 - b)x^2 - (b + 2)x - b - 2 > 0$, $x_0 = -2$;

в) $(2c - 1)x^2 - 2(c + 2)x + 2c + 4 > 0$, $x_0 = 2$;

г) $3(1 - d)x^2 - (3d + 1)x - 3d - 1 > 0$, $x_0 = -2$.

74. При каком a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$ равна их произведению?

75. При каких значениях a уравнение $(2 - x)(x + 1) = a$ имеет действительные положительные корни?

§ 3. ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Решите уравнение:

1. а) $\frac{1}{x} = 5$; б) $\frac{2}{x-1} = 0$; в) $\frac{4}{x+2} = a$; г) $\frac{1}{|2-x|} = a$.

2. а) $\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x}$; б) $\frac{2}{x-1} + x = \frac{x+1}{x-1}$;

в) $\frac{x^2+3}{x+3} = 2$; г) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-a)(x-1)}$.

Решите неравенство:

3. а) $\frac{1}{x} > 1$; б) $\frac{1}{x} \leqslant 1$; в) $\frac{1}{x-2} > -1$;

г) $\frac{1}{x+3} \leqslant -2$; д) $\frac{a}{x-1} > 1$; е) $\frac{a}{x+1} \geqslant -1$.

4. а) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} > 0$; б) $\frac{1}{2x-3} \leqslant \frac{1}{2x+5}$.

5. ● а) $\frac{x^2-5x+4}{x-4} \geqslant 0$; б) $\frac{x+3}{3x^2+10x+3} < 0$.

6. а) $\frac{2}{|x+2|} \leqslant 1$; ▲ б) $\frac{2}{|x-2|} > \left|\frac{-3}{2x-1}\right|$;

● в) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9} + \frac{|x-2|}{|x-3|} - 12 < 0$; г) $x - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) < \frac{2(x+1)}{3a}$.

Постройте график функции:

7. а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{1}{2+x}$; г) $y = \frac{1}{1-x}$.

8. а) $y = \frac{1}{|x-3|}$; б) $y = -\frac{1}{|2x+1|}$.

9. а) $y = 2 + \frac{1}{x}$; б) $y = 1 - \frac{2}{x}$;

в) $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$; г) $y = -3 - \frac{1}{x-2}$.

10. а) $y = \frac{x+1}{x-1}$; б) $y = \frac{x-1}{x+1}$;

в) $y = \frac{2x-2}{x+3}$; г) $y = \frac{x+2}{3-x}$.

11. а) $y = \frac{1}{2-|x|}$; б) $y = \frac{2}{|x-1|-1}$.

12. а) $y = \frac{|x-4|}{x+2}$; б) $y = \frac{1-x}{|x+3|}$.

13. а) $y = \frac{|x-1|}{|x|-1}$; б) $y = \frac{|x|-2}{|x+3|-1}$.

14. а) $y = \frac{x-1}{|x-1|} + \frac{|x+1|}{x+1} - \frac{1}{x}$; б) $y = -\left|\frac{x^2-9}{x+3} - x + \frac{2}{x-1}\right|$.

Найдите производную функции:

15. а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{1}{2(x+1)}$; г) $y = \frac{1}{1-x}$.

16. а) $y = 1 - \frac{2}{x+2}$; б) $y = -3 + \frac{1}{2x-1}$;

в) $y = \frac{2x-3}{x+1}$; г) $y = \frac{x-4}{1-3x}$.

17. В указанной точке найдите значение производной функции:

а) $y = \frac{3}{x}$, $x_0 = 1$; б) $y = \frac{1}{|x|}$, $x_0 = -2$;

в) $y = \frac{2x-1}{x-1}$, $x_0 = 0$; г) $y = \frac{|x-3|}{x+1}$, $x_0 = 1$.

18. В указанной точке x_0 определите угол между осью Ox и касательной к кривой:

а) $y = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$; б) $y = \frac{x-2}{x+3}$, $x_0 = 0$;

в) $y = \frac{1-2x}{|x|}$, $x_0 = 3$; г) $y = \frac{|x-1|}{|x+3|}$, $x_0 = -2$;

д) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$; е) $y = \frac{2-3x}{2x+1} + \frac{1}{|x|}$, $x_0 = -1$.

19. В указанной точке $P(x_0; y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой:

а) $y = -\frac{3}{x}$, $P(3; -1)$; б) $y = \frac{1}{x-2}$, $P(1; -1)$;

в) $y = \frac{x-3}{|x+2|}$, $P\left(0; -\frac{3}{2}\right)$; г) $y = \frac{|x-2|}{2x+1} - \frac{1}{|x-3|}$, $P\left(1; -\frac{1}{6}\right)$.

20. ● На гиперболе $y = \frac{x-1}{x+1}$ найдите точку M, в которой касательная к этой гиперболе: а) параллельна прямой $y = 2x + 1$; б) перпендикулярна прямой $y = -\frac{1}{8}x - 3$.

21. ● Покажите, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

22. ▲ Составьте уравнение такой касательной к гиперболе $y = \frac{x+9}{x+5}$, которая проходит через начало координат.

23. ● Докажите, что функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ строго монотонна на любом интервале $(x_1; x_2)$ при условии $ad \neq bc$, $c \neq 0$, $x = -\frac{d}{c} \notin (x_1; x_2)$.

24. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \frac{x-3}{x+1}$ на отрезке $[0; 2]$;

б) $y = \frac{2x+1}{x-2}$ на отрезке $[-1; 1]$.

25. Функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ задана на отрезке $[x_1; x_2]$. Докажите существование точки $x_0 \in (x_1; x_2)$ такой, что $y(x_2) - y(x_1) = y'(x_0)(x_2 - x_1)$. Найдите координаты точки x_0.

§ 4. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

При делении многочлена (полинома) n-й степени

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0)$$

на $x - x_0$ получаем

$$\frac{P_n(x)}{x - x_0} = Q_{n-1}(x) + \frac{R}{x - x_0}, \qquad (1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — частное (многочлен $(n - 1)$-й степени), R — остаток.

ТЕОРЕМА БЕЗУ. *Остаток R от деления многочлена $P_n(x)$ на $x - x_0$ равен значению многочлена $P_n(x)$ в точке x_0, т. е. $R = P_n(x_0)$.*

В самом деле, запишем выражение (1) в виде $P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - x_0) + R$.

Так как $P_n(x_0) = Q_{n-1}(x_0)(x_0 - x_0) + R$, то $R = P_n(x_0)$.

Определение. Число x_0 называют *корнем* (или *нулем*) многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x_0) = 0$.

Следствие теоремы Безу. *Если x_0 — корень многочлена $P_n(x)$, т. е. $P_n(x_0) = 0$, то $P_n(x)$ делится на $x - x_0$ без остатка.*

В этом случае $P_n(x_0) = Q_{n-1}(x_0)(x_0 - x_0) + R = 0 \Rightarrow R = 0$, $P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - x_0)$.

Пример 1. Решить уравнение $4x^3 - 3x^2 - 1 = 0$.

▲ Легко убедиться в том, что $x = 1$ — корень многочлена $4x^3 - 3x^2 - 1$:

$$\left.\begin{array}{r|l}
-\,4x^3-3x^2-1 & \;x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^3-4x^2} & 4x^2+x+1 \\
-\,x^2-1 & \\
\underline{x^2-x} & \\
-\,x-1 & \\
\underline{x-1} & \\
0 &
\end{array}\right\}\Rightarrow 4x^3-3x^2-1=(x-1)(4x^2+x+1).$$

Ответ: $x = 1$.

Уравнение

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0,\ n \geqslant 1 \qquad (2)$$

называют *алгебраическим уравнением n-й* степени.

ТЕОРЕМА. *Если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то свободный член уравнения делится на этот корень.*

Пример 2. Решить уравнение $2x^3 + 3x^2 - x + 2 = 0$.

▲ Свободный член уравнения делится на ±1, ±2. Легко убедиться, что -2 является корнем уравнения.

Разделив многочлен $2x^3 + 3x^2 - x + 2$ на $x + 2$, получим в частном $2x^2 - 2x + 1$; поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$(x + 2)(2x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = -2$, так как дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 - 2x + 1$ отрицателен.

Ответ: $x = -2$.

ТЕОРЕМА. *Если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $\frac{m}{k}$, где $\frac{m}{k}$ — несократимая дробь, то свободный член уравнения делится на m, а коэффициент при старшей степени делится на k.*

Пример 3. Решить уравнение $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

▲ Свободный член уравнения делится на ±1, ±2, а коэффициент при старшей степени делится на ±1, ±3. Значит, рациональными корнями могут быть числа ±1, ±2, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$. Подставив эти числа в уравнение, находим корень $x = \frac{2}{3}$. Разделив многочлен на $x - \frac{2}{3}$, получаем в частном $x^2 + x + 1$, поэтому уравнение $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 + x + 1) = 0$ эквивалентно исходному. Оно имеет единственный корень $x = \frac{2}{3}$.

Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

● **1.** Решите уравнение:

а) $(x - 1)(x^2 + 4x + 3) = 0$; б) $(2x + 3)(x^2 - x + 1) = 0$;
в) $x^3 + 27 = 0$; г) $8x^3 - 1 = 0$; д) $x^3 - 1 + x^2 - 1 = 0$;
е) $x^3 + 8 + x^2 - 4 = 0$; ж) $x^3 + 1 + x + 1 = 0$; з) $x^3 - 8 + x - 2 = 0$;
и) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; к) $x^3 - x^2 + x - 1= 0$.

2. ▲ Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — целые числа, имеет рациональный корень x_1. Докажите, что x_1 — целое число и что c делится на x_1 нацело.

3. Найдите рациональные корни уравнения:

▲ а) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; б) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
в) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$; г) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$;
● д) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$; ● е) $2x^3 + x^2 + 5x - 3 = 0$.

4. ● Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$. Докажите, что $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

5. Дано уравнение $x^3 + px + q = 0$. Найдите сумму квадратов его корней.

6. ▲ Решите уравнение $x^3 + 3x - 3 = 0$.

7. Решите уравнение:

а) $(x - 1)(x + 3)(x^2 - x - 6) = 0$;
б) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x + 10) = 0$; в) $(x^2 - x - 3)(x^2 - 2x + 2) = 0$;
г) $(x^2 - x +1)(x^2 - 2x + 3) = 0$; ● д) $x^4 - 16 - 5x(x^2 - 4) = 0$;
● е) $x^4 + 11x^2 + 10 + 7x(x^2 + 1) = 0$.

8. ● Уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где a, b, c, d — целые числа, имеет рациональный корень x_1. Докажите, что x_1 — целое число и что d делится нацело на x_1.

9. Найдите рациональные корни уравнения:

а) $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = 0$; б) $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 12 = 0$;
в) $x^4 + x^3 - 5x - 5 = 0$; г) $x^4 + x^3 - 1 = 0$;
● д) $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$.

Решите уравнение:

10. ● а) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; б) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

11. а) $(x-1)^4 + (x+1)^4 = 16$; ▲ б) $(2x-3)^4 + (2x-5)^4 = 2$.

12. ● а) $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) + 6 = 0$;

б) $\dfrac{1}{2x^2 - x + 1} + \dfrac{3}{2x^2 - x + 3} = \dfrac{10}{2x^2 - x + 7}$.

13. ● а) $(x - a)x(x + a)(x + 2a) = 3a^4$;

б) $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.

14. ▲ а) $x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 8\left(x - \dfrac{2}{x}\right) - 4 = 0$;

● б) $4x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 9x + 9 = 0$;

● в) $\dfrac{(x+1)^5}{x^5+1} = \dfrac{81}{11}$; ● г) $(x^2 - 6x - 9)^2 = x^3 - 4x^2 - 9x$.

15. ▲ а) $x^2 + \dfrac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$;● б) $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0$.

16. ● а) $x^4 + 4x - 1 = 0$; ● б) $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$;

● в) $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$.

17. ▲ а) $(x^3 - 2x) - (x^2 + 2)a - 2a^2x = 0$;

▲ б) $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$.

18. ▲ $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$, если известно, что левая часть уравнения разлагается на множители с целыми коэффициентами.

Решите неравенство:

19. ▲ а) $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$;

б) $(x + 2)x(x - 1)(x - 2) < 0$;

в) $(x + 4)^5(x + 3)^6(x + 2)^7(x - 1)^8 \leqslant 0$;

г) $(x + 3)^n(x - 2) < 0$, $n \in \boldsymbol{N}$.

20. а) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0$; б) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \leqslant 0$;

в) $2x^3 - 3x^2 + 7x - 3 > 0$.

21. а) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \geqslant 0$; б) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 5 < 0$.

22. а) $3x^4 - 10x^2 + 3 > 0$; ● б) $2x^2(x - 4)^2 < 32 - 5(x - 2)^2$.

23. ● а) $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geqslant 0$;

● б) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) < 48$.

24. ▲ а) $(x + 1)^4 > 2(1 + x^4)$; ● б) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 < 0$.

25. ▲ Докажите, что многочлен $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ положителен при любом $x \in \boldsymbol{R}$.

26. ▲ Пусть $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$ и $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$, $m \in N$, $n \in N$, $Q(x) \not\equiv 0$. Докажите, что неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ и $P(x)Q(x) > 0$ равносильны.

Решите неравенство:

27. ▲ а) $\frac{1}{x} < \frac{2}{x-2}$; б) $\frac{x+4}{x-2} < \frac{2}{x+1}$; в) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$;

● г) $\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2-3x+1}{x-3} > 2x - \frac{1}{4x-8}$;

д) $\frac{x^3-2x^2+5x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1$; е) $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+7} > 0$.

28. ● а) $\frac{1}{x^2+x} \leqslant \frac{1}{2x^2+2x+3}$;

▲ б) $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x-4} < \frac{1}{30}$;

в) $\frac{4x-17}{x-4} + \frac{10x-13}{2x-3} > \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}$.

29. ● а) $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{5}{4}$; ● б) $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} \leqslant 5$.

30. ● а) $\frac{(x+1)^4}{x(x^2+1)} > \frac{128}{15}$; ● б) $x^3 - \frac{1}{x^2} \geqslant 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

31. ● $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 < \frac{2x^2+72}{x^2-36}$.

32. а) $|x^3 - x| \leqslant x$; б) $\frac{4}{|x+1|-2} \geqslant |x-1|$.

Найдите производную функции:

33. а) $y = x^3 - 6x^2 + 1$; б) $y = -x^3 + \frac{1}{3}x - 2$;

в) $y = x^4 - 6x + 3$; г) $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^3$.

34. а) $y = (x+2)(x^2 - x + 5)$;
б) $y = (3 - x)(x - x^2)$;
в) $y = (x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 3)$;
г) $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

35. а) $y = \frac{x}{1+x^2}$; б) $y = \frac{1-x}{2+x^2}$; в) $y = \frac{x^3-x}{x+3}$;

г) $y = \frac{x^4+4x}{(x+1)^2}$; д) $y = \frac{(x^2-1)(x+3)}{x-4}$; е) $y = x^3 + \frac{1}{1-x}$.

36. а) $y = (2 - 3x)^{30}$; б) $y = \left(6x^2 - \frac{4}{x} + 1\right)^8$;

в) $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2$; г) $y = (x^4 - x^3 + 5x^2 - 2)^8$.

В указанной точке x_0 вычислите значение производной функции:

37. а) $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 2)$, $x_0 = 0$;

б) $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 + 1)$, $x_0 = 1$;

в) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$, $x_0 = -2$;

г) $y = \frac{x^5}{(x-2)^2}$, $x_0 = 1$;

д) $y = \frac{3}{(1 - x^2)(1 - 2x^3)}$, $x_0 = 0$.

38. а) $y = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$, $x_0 = -1$;

б) $y = (1 + x^3)\left(5 - \frac{1}{x^2}\right)$, $x_0 = a$;

в) $y = \frac{a - x}{1 + x^2}$, $x_0 = a$;

г) $y = [(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)]^5$, $x_0 = 0$;

д) $y = x(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n)$, $x_0 = 0$, $n \in \boldsymbol{N}$.

39. В заданной точке $P(x_0; y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой:

а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$, $P(0; 0)$; б) $y = x^3 - 3x^3 + 2$, $P(0; 2)$;

в) $y = (x - 2)^2(x + 1)$, $P(1; 2)$; г) $y = 2x^4 - x^3 + 1$, $P(-1; 4)$;

д) $y = (x - 4)^3(2x + 1)$, $P(2; -40)$; е) $y = x - \frac{1}{x}$, $P(1; 0)$;

ж) $y = \frac{1}{x^4} + 2$, $P(1; 3)$.

40. На кривой $y = x^3 - 3x + 2$ найдите точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x$.

41. В какой точке касательная к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x + 8$ параллельна биссектрисе I и III координатных углов?

42. В каких точках линии $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x + 5$?

43. На кривой $y = x^2(x - 2)^3$ найдите точку, в которой касательная к ней параллельна прямой $y = 24x - 1$.

44. На линии $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ найдите точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

45. ● Покажите, что любая касательная к кривой $y = x^5 + 8x + 1$ составляет с осью Ox острый угол.

Найдите критические точки функции:

46. а) $y = 2x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + x - \sqrt{3}$;

б) $y = x^3 - 3\sqrt[3]{3}\,x^2 + 3\sqrt[3]{9}\,x - 3\sqrt[3]{3}$;

в) $y = 3x^3 - x^2 + 5x + 0{,}7$; г) $y = (x + 2)^2(3x - 1)$;

д) $y = x^3 + 3|x|$; е) $y = |x^3| - 9x$.

47. а) $y = x^4 + 8x^2 - 64x + 1$;

б) $y = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x - 3$;

в) $y = x^4 + 6x^2 + 5$; г) $y = -x^4 + 4|x|$; д) $y = x^4 + 8|x^3|$.

48. а) $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2}{3}x^3 - 3(x + 1)$;

б) $y = 0{,}6x^5 - 13x^3 + 108x - 5$;

в) $y = \left(\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{3}{2}x^4 + 3x^3\right) + 5\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2\right) + 4x - 7$;

г) $y = \dfrac{x^7}{7} - 7x + \pi$; д) $y = x^2 + \dfrac{16}{x}$.

49. Найдите интервалы монотонного убывания функции:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 15$; б) $y = x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - 2$;

в) $y = x^5 - 20x^3 + 1$; г) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

50. Найдите интервалы монотонного возрастания функции:

а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 11$; б) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$;

в) $y = 0{,}25x^4 + x^2 - 6$; г) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$; д) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$.

51. Определите точки экстремума функции:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 45x + 1$; б) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 3$;

в) $y = |3x - 1| - x^3$; г) $y = (x - 1)^3(x + 2)$;

д) $y = (x + 3)^2(x - 4)^2$; е) $y = 2x^2 + \frac{4}{x}$; ж) $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

52. Найдите модуль разности экстремумов функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

53. В указанном промежутке найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = x^3 + 9x - 3$ на отрезке $[-1; 0]$;

б) $y = 6x - x^3$ на отрезке $[-2; 1]$;

в) $y = (x + 2)^3(x - 1)$ на отрезке $[-1; 2]$;

г) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4$ на отрезке $[-1; 2]$;

д) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ на отрезке $[-2; -1]$.

Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график:

54. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

55. $y = -x(x^2 - 4) - 3$.

56. $y = (x + 2)^2(x - 1)^2$.

57. $y = -x^4 + 2x^2 + 8$.

58. $y = (x - 1)^3(x + 1)^2$.

59. $y = x + \frac{1}{x}$.

60. $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

61. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

62. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

63. $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

64. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

65. $y = x + \frac{4}{x^2}$.

66. Не используя микрокалькулятор, найдите значение числового выражения:

▲ а) $\sqrt[3]{30 + \sqrt{899\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{30 - \sqrt{899\frac{26}{27}}}$;

б) $\sqrt[3]{50 + \sqrt{2495\frac{10}{27}}} + \sqrt[3]{50 - \sqrt{2495\frac{10}{27}}}$;

в) $\sqrt[3]{12 + \sqrt{143\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{143\frac{26}{27}}}$;

г) $\sqrt[3]{105 + \sqrt{11024\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{105 - \sqrt{11024\frac{26}{27}}}$;

д) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решите систему уравнений:

1. а) $\begin{cases} 3x - y = 0, \\ -x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x - 4y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0 \cdot x + y = 0, \\ 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = -1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 2. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -x + 5y = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 8y = 3, \\ x - 2y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y = -1, \\ 9x + 3y = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y - 4x = a, \\ 8x - 2y = 1. \end{cases}$

3. При каких значениях k совместна система уравнений:

а) $\begin{cases} kx + y = 2, \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} kx + 4y = 4, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + (k - 1)y = k + 1, \\ (k + 1)x + y = 3? \end{cases}$

4. Найдите все значения m, при которых не имеет решений система уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + (9m^2 - 2)y = 3m, \\ x + y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} m^2x + (2 - m)y = m^3 + 4, \\ mx + (2m - 1)y = m^5 - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2mx + y = 6m^2 - 5m + 1, \\ x + 2my = 0. \end{cases}$

5. Найдите значения c и d, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (c + 1)^2x - (c + 1)y = -c, \\ (d - 1)x + (5 - 2d)y = c + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$.

6. ▲ Одним из решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

является упорядоченная пара чисел (1; 3). Определите числовые значения a, b и c.

7. Найдите значения $b \in \boldsymbol{R}$ такие, чтобы при любых $a \in \boldsymbol{R}$ имела хотя бы одно решение система уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = a, \\ ax + 3y = b. \end{cases}$

8. ▲ Найдите все значения a и b, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

9. При каких значениях k существуют решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + ky = 3, \\ kx + 4y = 6, \end{cases}$$

удовлетворяющие одновременно неравенствам $x > 1$, $y > 0$?

10. При каких значениях a решения системы уравнений

$$\begin{cases} -2x + y = a^2 - 1, \\ 3x + 2y = 2a^2 + 7a + 5 \end{cases}$$

удовлетворяют неравенству $x\sqrt{y} + 3 > 0$?

Решите систему уравнений:

11. ● $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+y-1} + \dfrac{3}{x+2y-3} = 4{,}75, \\ \dfrac{3}{2x+y-1} - \dfrac{2}{x+2y-3} = 2{,}5. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} |x| + y = 4, \\ x + 3|y| = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 5, \\ \sqrt{(x-y)^2} = 1. \end{cases}$

13. ▲ Найдите значения $x \in \boldsymbol{N}$ и $y \in \boldsymbol{N}$, удовлетворяющие уравнению $23x + 31y = 1000$.

14. На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие неравенству:

а) $|x - y| \leqslant 1$; б) $|x + y| \geqslant 2$; в) $|x| - |y| \geqslant 1$;
г) $|x| + |y| \leqslant 3$; д) $|x - 1| + |y + 1| \geqslant 2$; е) $|x + y| + |x - y| \leqslant 2$.

15. На плоскости xOy укажите точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 3y - x < 5, \\ y + 2x < 11, \\ 4y + x > 9. \end{cases}$$

Найдите также все целые значения x и y, удовлетворяющие этой системе.

16. При каких значениях $a \in \boldsymbol{R}$ точка $(a;\ a^2)$ расположена внутри треугольника, образованного при пересечении прямых $y = x + 1$, $y = 3 - x$, $y = -2x$?

Решите систему уравнений:

17. $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ -3x + 4y + 2z = 11. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 4t - 5, \\ 4x - 3y - 6z = 5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0, \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}. \end{cases}$ **20.** ● $\begin{cases} \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}, \\ x + 2y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$

21. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{5}{6}z = 61, \\ x + y + z = 79. \end{cases}$$

▲ а) Найдите значение суммы $\dfrac{2}{5}y + \dfrac{z}{2}$; ▲ б) из всех натуральных решений системы найдите такое, при котором x принимает наибольшее значение.

22. ● Известно, что для некоторой функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определите знак коэффициента a.

23. Изобразите множество $\{(x; y; z) \mid |x| + |y| + |z| \leqslant 1\}$ и назовите полученную фигуру.

§ 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решите систему уравнений:

1. а) $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2xy - y^2 + 5x + 20 = 0, \\ 3x + 2y - 3 = 0; \end{cases}$ ● в) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 200, \\ x + 2y = 100; \end{cases}$

● г) $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 6xy - 6x - 18y - 40 = 0, \\ x + 30 = 2y. \end{cases}$

2. ▲ а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ ● б) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = -4; \end{cases}$ ● в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$

● г) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1; \end{cases}$ ▲ д) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x + y = 1; \end{cases}$

● е) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 275, \\ x + y = 5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 63, \\ xy = 4. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x + y + xy = -11, \\ x^2 + y^2 + xy = -13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 30, \\ x + xy - y = 13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + 0{,}2)^2 + (y + 0{,}3)^2 = 1, \\ x + y = 0{,}9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

● д) $\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30, \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11. \end{cases}$

4. ▲ а) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 45y^2 = 0, \\ 2x + 9y^2 = 4; \end{cases}$ ● б) $\begin{cases} x^2 - 5xy = 16, \\ 2xy + y^2 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ (x + y)^2 - \dfrac{1}{2}y^2 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10, \\ x^2y - y^3 = -3. \end{cases}$

5. ▲ а) $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2(x^2 - 3) + xy + 1 = 0, \\ y^2(3x^2 - 6) + xy + 2 = 0. \end{cases}$

6. ● а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x + y - 2) = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{y}{x}(x + y - 1) = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy. \end{cases}$

8. Найдите все пары чисел x, y, для которых одновременно выполняются условия $x^2 - 2xy + 12 = 0$, $x^2 + 4y^2 \leqslant 60$ и $x \in \boldsymbol{Z}$.

9. Найдите натуральные решения системы

$$\begin{cases} x = y + 2, \\ xy \leqslant 17, \\ \dfrac{y+1}{x+2} < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

10. Найдите все значения a, при которых множество

$$\{(x;\, y) \mid x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1\} \cap \{(x;\, y) \mid x - y + a \geqslant 0\}$$

содержит только одну точку. Найдите эту точку.

11. Решите уравнение:

а) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$;

в) $(x + y - a)^2 + (y - 1)^2 + (x + 3)^2 = 0$.

Решите систему уравнений:

12. а) $\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 3x - 4y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2u + v + w = 6, \\ 3u + 2v + w = 9, \\ 3u^3 + 2v^3 + w^3 = 27. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + yz + zx = -5, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 12. \end{cases}$

● **14.** $\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ yz + y + z = -3, \\ xz + x + z = -5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 - yz = 14, \\ y^2 - xz = 28, \\ z^2 - xy = -14. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ y^2 + yz + z^2 = 7, \\ z^2 + zx + x^2 = 19. \end{cases}$

17. $\begin{cases} xy + xz = 8, \\ yz + xy = 9, \\ xz + yz = -7. \end{cases}$

● **18.** $\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y} = 1, \\ \dfrac{7yz}{y+z} = 1, \\ 6xz = x + z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3, \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1, \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y^3 = 9x^2 - 27x + 27, \\ z^3 = 9y^2 - 27y + 27, \\ x^3 = 9z^2 - 27z + 27. \end{cases}$

21. ● Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, для которых выполняется соотношение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

22. Изобразите штриховкой множество точек координатной плоскости, задаваемое системой неравенств:

а) $\begin{cases} y + 2x \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 5 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y \leqslant 0, \\ 2x^2 + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$

23. Изобразите на плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 2y \geqslant x^2, \\ y \leqslant -2x^2 + 3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + x^2 \leqslant 0, \\ y - 2x + 3 \geqslant 0, \\ y + 1 \leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16. \end{cases}$

§ 7. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

При решении иррациональных уравнений нужно учитывать следующую ТЕОРЕМУ: уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x)$, $n \in N$, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (\varphi(x))^{2n}, \\ \varphi(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

П р и м е р. Решить уравнение $\sqrt{7-x-x^2}=x-1$.

▲ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 7-x-x^2=(x-1)^2, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-6=0, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Решите уравнение:

1. а) $\sqrt{x+1}=a$; б) $\sqrt{x+3}=\sqrt{a-x}$; ● в) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

2. а) $11+2x=\sqrt{22-x}$; б) $21+\sqrt{2x-7}=x$;

в) $2\sqrt{x+5}=x+2$; г) $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$.

3. ▲ а) $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6$; б) $\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|}=a$.

4. ● $\sqrt{10+x+6\sqrt{1+x}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7$.

5. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

6. ▲ а) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$;

б) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$.

7. ▲ а) $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{22+x}=5$; ▲ б) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$.

8. а) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}=a$; ▲ б) $\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}=a$;

в) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$; г) $\sqrt{2x-1}=x-a$;

д) $\sqrt{x^2-x\sqrt{x^2+a^2}}=a-x$; е) $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$;

ж) $x-\sqrt{x^2-x}=a$.

9. ● $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1$.

10. ● $x^4+\frac{1}{4}=x\sqrt{2}\sqrt{x^4-\frac{1}{4}}$.

При решении иррациональных неравенств нужно учитывать следующие **ТЕОРЕМЫ**.

1. При натуральном n неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}<\varphi(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)<(\varphi(x))^{2n}, \\ f(x)\geqslant 0, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$$

2. При натуральном n неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} > \varphi(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases}\varphi(x) < 0,\\ f(x) \geqslant 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\varphi(x) \geqslant 0,\\ f(x) > (\varphi(x))^{2n}.\end{cases}$$

3. При натуральном n неравенство $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\varphi(x)} > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\varphi(x) > 0,\\ f(x) > (\varphi(x))^{2n}.\end{cases}$$

4. При натуральном n неравенство $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\varphi(x)} < 1$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases}\varphi(x) < 0,\\ f(x) \geqslant 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\varphi(x) > 0,\\ f(x) \geqslant 0,\\ f(x) < (\varphi(x))^{2n}.\end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{2-x} < x$.

▲ $$\sqrt{2-x} < x \Leftrightarrow \begin{cases}2-x < x^2,\\ 2-x \geqslant 0,\\ x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-2 > 0,\\ x \leqslant 2,\\ x > 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x+2) > 0,\\ 0 < x \leqslant 2\end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leqslant 2.$$

Ответ: $(1; 2]$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{5+x} > 1-x$.

▲ $$\sqrt{5+x} > 1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x<0,\\ 5+x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}1-x \geqslant 0,\\ 5+x > (1-x)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 1,\\ \begin{cases}x \leqslant 1,\\ x^2-3x-4 < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 1,\\ \begin{cases}x \leqslant 1,\\ (x+1)(x-4) < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x > 1,\\ -1 < x \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

Ответ: $(-1; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{2+x} > 1$.

▲ $$\frac{\sqrt{x^2+x}}{2+x} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x > -2,\\ x^2+x > x^2+4x+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > -2,\\ 3x < -4\end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left(-2; -\dfrac{4}{3}\right)$.

П р и м е р 4. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2-x}}{x+2} < 1$.

▲ $$\frac{\sqrt{x^2-x}}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2<0, \\ x^2-x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+2>0, \\ x^2-x \geqslant 0, \\ x^2-x > (x+2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ x(x-1) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>-2, \\ x(x-1) \geqslant 0, \\ 5x > -4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ -\frac{4}{5} < x \leqslant 0, \\ x \geqslant 1. \end{array}\right.$$

О т в е т: $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{5}; 0\right] \cup [1; +\infty)$.

Решите неравенство:

11. а) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$; б) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1$;

в) $\sqrt{x+1} > \sqrt{3-x}$; г) $\sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{x-a}$;

д) $(1-a)\sqrt{2x+1} < 1$; е) $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$.

12. а) $x > \sqrt{1-x}$; б) $x+1 > \sqrt{2+x}$;

в) $x > \sqrt{24-5x}$; г) $x > \sqrt{x^2+x-12}$;

д) $\sqrt{24-10x} > 3-4x$; е) $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$.

13. а) $4-x < \sqrt{x^2-2x}$; б) $1-\sqrt{13+3x} \leqslant 2a$;

в) $(x^2+2x-8)\sqrt{x^2+x-2} \leqslant 0$; г) $\sqrt{x^2-3x}\,(\sqrt{x+2}-x) \geqslant 0$;

д) $\sqrt{x+3} \leqslant 3-|x|$; е) $\sqrt{x+2} \geqslant 6-|x-4|$.

14. а) $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$; б) $\frac{1}{\sqrt{9-x}} > \frac{1}{x-2}$;

в) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$; г) $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1$.

15. а) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$; б) $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\frac{1}{3}$;

в) $\frac{\sqrt{(x+6)(3-x)}}{2-x} + \frac{2\sqrt{18-3x-x^2}}{3x+4} \leqslant 0$.

16. а) $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$; б) $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 2x-1$;

▲ в) $2(x + \sqrt{x^2+4x+3}) < 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} - 2)$;

▲ г) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$; ● д) $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{35}{12}$.

17. Найдите все значения x, при которых:

а) график функции $f(x) = \sqrt{7(x-4)(x+2)} - \dfrac{7}{6}(x+1)$ расположен выше оси абсцисс;

б) график функции $f(x) = \dfrac{3}{4}(x+2) - \sqrt{2(x-4)(x+3)}$ расположен ниже оси абсцисс.

18. Найдите производную функции:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^2\sqrt{x}$; в) $y = 3\sqrt[3]{x-1}$; г) $y = \sqrt{x^2-2x+3}$;

д) $y = (1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})$; е) $y = \sqrt{1+x^2}$; ж) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

19. В указанной точке $P(x_0;\ y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой:

а) $y = \sqrt{x}$, $P(4;\ 2)$; б) $y = x - 2\sqrt{x}$, $P(1;\ -1)$;

в) $y = 3\sqrt[3]{x^2}$, $P(-8;\ 12)$; г) $y = \sqrt{x^3} + 1$, $P(4;\ 9)$.

20. Найдите критические точки функции:

а) $y = x - 4\sqrt{x} + \sqrt{3}$; б) $y = \sqrt{|x-1|}$; в) $y = \sqrt{x^2-6x+15}$;

г) $y = \sqrt{x^2-6x}$; д) $y = (x-1)\sqrt{x}$; е) $y = (x+2)\sqrt{x-1}$.

21. Найдите интервалы монотонного возрастания функции:

а) $y = \sqrt{x-4}$; б) $y = \sqrt{x^2-x+1}$; в) $y = \sqrt{x^2+4x-3}$;

г) $y = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; д) $y = 36x - 3x^2 + 4\sqrt{x^3}$.

22. Найдите интервалы монотонного убывания функции:

а) $y = \sqrt{5-2x}$; б) $y = \sqrt{2x-x^2}$;

в) $y = \sqrt{2x^2-x+1}$; г) $\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$, $x \geqslant 0$;

д) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{3}{2}x - 3\sqrt{x} + 1$, $x \geqslant 0$.

23. ▲ Докажите, что для всех $x \in (0;\ +\infty)$ выполняется неравенство $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$.

24. На указанном отрезке найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-6; 8]$; б) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $x \in [0; 3]$.

25. Найдите точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = (x - 1)^2\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ на отрезке $[0; 3]$.

26. Решите неравенство:

▲ а) $\dfrac{\sqrt{(x+3)(9-x)}}{3x-2} \geqslant \dfrac{\sqrt{27+6x-x^2}}{2x+5}$;

б) $\dfrac{\sqrt{(x+6)(3-x)}}{2-x} + \dfrac{2\sqrt{18-3x-x^2}}{3x+4} \leqslant 0$;

в) $\dfrac{\sqrt{15+2x-x^2}}{2x-5} \geqslant \dfrac{\sqrt{(x+3)(5-x)}}{x-3}$;

г) $\dfrac{\sqrt{20+x-x^2}}{x+3} \leqslant \dfrac{\sqrt{(5-x)(x+4)}}{2x-5}$.

27. Решите неравенство:

▲ а) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} > x - \dfrac{5}{2}$; б) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - \dfrac{11}{6}$;

в) $\sqrt{x^2 - 7x + 12} > x - \dfrac{15}{4}$; г) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x - \dfrac{11}{4}$.

28. Решите неравенство:

▲ а) $\sqrt{x^2 + x - 12} \geqslant x$; б) $\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant x - 1$;

в) $\sqrt{x^2 + x - 6} > x$; г) $\sqrt{x^2 - 3 - 4} > x - 2$.

§ 8. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решите систему уравнений:

1. ● а) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{4}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}} + \dfrac{3}{\sqrt{y+6}} = \dfrac{13}{6}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x-y} - \sqrt[4]{x+y}} = 1, \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y}} = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}} + 4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}} = 5, \\ x = y + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{10}{3}, \\ xy - 2x - 2y = 2. \end{cases}$

3. ● $\begin{cases} x + y + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{12}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2} - 2ay - 3 = 0, \\ x\sqrt{x^2+y^2} = 2ax. \end{cases}$

5. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ y = ax + 1? \end{cases}$$

6. При каких значениях a совместна система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2xy+y^2} + \sqrt{x^2-2xy+y^2} = 4, \\ \sqrt{x^2+y^2} = a? \end{cases}$$

Решите систему уравнений:

7. ▲ $\begin{cases} \sqrt{b-x} - \sqrt{y-x} = \sqrt{y}, \\ \sqrt{a-x} + \sqrt{y-x} = \sqrt{y}. \end{cases}$

8. ● $\begin{cases} x^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 17, \\ y^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 68. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - y = \dfrac{3}{2}(\sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{x^2y}), \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \dfrac{5}{2}\sqrt[6]{xy}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2+y} = 4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2, \quad a > 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 1 = \dfrac{13}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 10. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y^2 - x\sqrt{xy} = 18, \\ x^2 - y\sqrt{xy} = 9. \end{cases}$

15. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{4-3x} \geqslant x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 5. \end{cases}$

Решите графически неравенство и систему неравенств:

16. $\sqrt{x-y} \geqslant \sqrt{x+y}$.

17. $1 + \sqrt{x} \geqslant y$.

18. $\begin{cases} y - 2 < \sqrt{1-x^2}, \\ y > 2|x|. \end{cases}$

Глава II

Показательные и логарифмические функции. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств

§ 1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Основные тождества. При решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств используют следующие тождества ($a > 0$, $a \neq 1$):

1. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

2. $a^x \cdot a^y \Leftrightarrow a^{x+y}$.

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

4. $a^0 = 1$.

5. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$, $b > 0$.

6. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, $b > 0$.

7. $(a^x)^y = a^{xy}$.

8. $a^{\log_a x} = x$, $x > 0$ — основное логарифмическое тождество.

9. $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$.

10. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$, $xy > 0$.

11. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a |x|$.

12. $\log_a x^{2m} = 2m \log_a |x|$, $x \neq 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

13. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c > 0$, $c \neq 1$.

14. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$.

15. $\log_a x = \log_{a^k} x^k,\ x > 0,\ k \in \boldsymbol{R},\ k \neq 0.$

16. $\log_{a^k} x^m = \dfrac{m}{k} \log_a x,\ x > 0,\ m,\ k \in \boldsymbol{R},\ k \neq 0.$

Показательные уравнения. Пусть дано уравнение $a^{f(x)} = b$, где $a > 0$.

1. Если $b \leqslant 0$, то $x \in \varnothing$.
2. Если $b > 0$, $a \neq 1$, то $f(x) = \log_a b$.
3. Если $a = 1$, $b = 1$, то $x \in D(f)$.
4. Если $a = 1$, $b \neq 1$, то $x \in \varnothing$.

Пример 1. Решить уравнение $2^x + 2^{2-x} = 5$.

▲ Положим $y = 2^x$, тогда уравнение примет вид

$$y + \frac{4}{y} = 5.$$

Умножив на y, приходим к квадратному уравнению

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

имеющему корни $y = 1$ и $y = 4$. Возвращаясь к переменной x, получаем соответственно $2^x = 1$ и $2^x = 4$, откуда находим $x = 0$ и $x = 2$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

▲ Введя новую переменную $t = 5^x > 0$ и решив полученное для t квадратное уравнение, имеем

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 5^0, \\ 5^x = 5^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Пример 3. Решить уравнение $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

▲ Разделив обе части исходного уравнения на положительное при любом x выражение 81^x и введя новую переменную $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x$, получим квадратное уравнение $3t^2 + t - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Так как $t > 0$, то отрицательный корень отбрасываем. Положительный корень дает:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

П р и м е р 4. Решить уравнение $x^{\lg x} = 1000x^2$.

▲ Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получаем эквивалентное уравнение

$$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0 \Leftrightarrow \lg x = -1,\ \lg x = 3.$$

О т в е т: $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 1000$.

П р и м е р 5. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x.$$

▲ Положим $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \cos\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; тогда $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sin\alpha$, и приходим к уравнению $(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x = 1$. Корнем этого уравнения является $x = 2$.

Докажем, что других корней уравнение не имеет. В самом деле, так как $0 < \cos\alpha < 1$; $0 < \sin\alpha < 1$, то:

при $x > 2$ имеем $(\cos\alpha)^x < \cos^2\alpha$, $(\sin\alpha)^x < \sin^2\alpha$, значит,

$$(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x < \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$$

при $x < 2$ имеем $(\cos\alpha)^x > \cos^2\alpha$, $(\sin\alpha)^x > \sin^2\alpha$, значит,

$$(\cos\alpha)^x + (\sin\alpha)^x > \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

О т в е т: $x = 2$.

Логарифмические уравнения. *Логарифмом* положительного числа x по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить x.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0).$$

При решении логарифмических уравнений нужно прежде всего учитывать, что логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел. Кроме того, часто применяют следующие формулы:

$$\log_a f(x) + \log_a \varphi(x) = \log_a f(x)\varphi(x);$$

$$\log_a f(x) - \log_a \varphi(x) = \log_a \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

П р и м е р 6. Решить уравнение

$$\log_2(4 - x) + \log_2(x + 2) = 3.$$

▲ Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} 4 - x > 0, \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 4.$$

Используя формулу сложения логарифмов, преобразуем данное уравнение:

$$\log_2 (4 - x)(x + 2) = 3 \Rightarrow (4 - x)(x + 2) = 2^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 8,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Оба корня входят в область определения исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_2 (3x - 1) + \log_2 x = 1.$$

▲ Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Применив формулу сложения логарифмов, получаем

$$\log_2 (3x - 1)x = 1 \Rightarrow (3x - 1)x = 2 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Значение x_2 не входит в область определения данного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Пример 8. Решить уравнение

$$x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} = \frac{1}{x}.$$

▲ Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2, получаем уравнение

$$(3 \log_2 x - \log_2^2 x + 3) \log_2 x = -\log_2 x,$$

решив которое находим $\log_2 x = 0$, $\log_2 x = -1$, $\log_2 x = 4$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 16$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_2 x \cdot \log_{2x} 4x = \frac{3}{2}.$$

▲ Применяя сначала формулу перехода от одного основания логарифмов к другому, а затем формулу сложения логарифмов, преобразуем уравнение к квадратному относительно $\log_2 x$:

$$\log_2 x \cdot \frac{\log_2 4x}{\log_2 2x} = \frac{3}{2},\ \log_2 x \cdot \frac{\log_2 4 + \log_2 x}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{3}{2},\ \text{или } y\frac{2+y}{1+y} = \frac{3}{2},$$

где $\log_2 x = y$. Решая полученное уравнение, находим $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 2^{-\frac{3}{2}}$.

1. Какие числа больше 1: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{0,6}$; б) $(1,4)^{0,6}$; в) $(0,8)^{-\frac{2}{3}}$; г) $(1,5)^{-0,1}$; д) $(0,4)^{-0,3}$; е) $(0,7)^{0,4}$?

2. Какие числа меньше 1: а) $(4,8)^{-0,8}$; б) $(0,(3))^{\sqrt{2}}$; в) $(\sqrt{3})^{0,43}$; г) $e^{0,75}$; д) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2,1}}$; е) $\left(\frac{\pi}{7}\right)^{-\sqrt{3,1}}$?

3. Что больше (x или y) в неравенстве:

а) $(0,8)^x > (0,8)^y$; б) $(1,5)^x < (1,5)^y$;

в) $(7,1)^x > (7,1)^y$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^y$, $x, y \in \boldsymbol{R}$?

4. ▲ Что больше 2^{300} или 3^{200}?

Упростите выражение:

5. а) $25^{\log_5 3}$; б) $e^{\ln \ln 3}$; в) $\ln ab - \ln |b|$;

г) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$; д) $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$.

6. а) $\frac{\log_2 25}{\log_2 5}$; б) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$;

в) $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$; ▲ г) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$.

7. Найдите:

а) $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = c$, $\log_{30} 5 = d$;

б) $\log_9 40$, если $\lg 15 = c$, $\log_{20} 50 = d$;

▲ в) $\lg (0,175)^4$, если $\lg 196 = c$, $\lg 56 = d$.

8. ▲ Докажите, что если $a = \log_{12} 18$, $b = \log_{24} 54$, то

$$ab + 5(a - b) = 1.$$

9. ▲ Не пользуясь таблицами, вычислите

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}.$$

10. ▲ Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ справедливо неравенство

$$\log_n (n + 1) > \log_{n+1} (n + 2).$$

11. ▲ Докажите (без использования таблиц), что

$$\log_4 9 > \log_9 25.$$

Решите уравнение:

12. а) $3^{x-5} = 7$; б) $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$;

в) $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$;

г) $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$; д) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

е) $4^{\frac{1}{x}-2} = \frac{\ln\sqrt{e}}{2}$; ж) $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$.

13. а) $\sqrt{3}^{-4+\log_{\sqrt{5}} x} = \frac{1}{3}$;

б) $7^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 7^{3x}$;

в) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}$;

г) $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x (0,125)^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$;

д) $4\sqrt[3]{(0{,}125)^{x-3}} = 2^{\sqrt{x+1}}$;

е) $\left((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}} = \sqrt[4]{3^7}$.

14. ▲ а) $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$;

● б) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$;

в) $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} = 84$;

● г) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

15. ● а) $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$;

● б) $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34 \cdot 15^{2x-x^2}$;

в) $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$;

г) $(\sqrt{5\sqrt{2}-7})^x + 6(\sqrt{5\sqrt{2}+7})^x = 7$.

16. ▲ а) $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2(x+6)} = 0$;

▲ б) $x^2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2 \cdot 2^{x-2}$.

17. ▲ а) $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 50$; б) $x^{\log_x (1-x)^2} = 9$.

18. $\log_3(x^2 + 4x + 12) = 2$.

19. а) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$;

▲ б) $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$;

в) $\lg(x - 3) + \lg(x + 6) = \lg 2 + \lg 5$;

г) $\lg(x - 4) + \lg(x + 3) = \lg(5x + 4)$;

д) $\ln(x^3 + 1) - 0,5\ln(x^2 + 2x + 1) = \ln 3$;

е) $\log_5(x - 2) + 2\log_5(x^3 - 2) + \log_5(x - 2)^{-1} = 4$,

● ж) $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$.

20. а) $\log_2(x + 2)^2 + \log_2(x + 10)^2 = 4\log_2 3$;

б) $\log_2 \dfrac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \dfrac{3x-7}{3x-1}$.

в) $2\log_2 \dfrac{x-7}{x-1} + \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} = 1$;

г) $\log_3(5x - 2) - 2\log_3\sqrt{3x+1} = 1 - \log_3 4$;

д) $\lg(3x - 2) - 2 = \dfrac{1}{2}\lg(x + 2) - \lg 50$;

● е) $\lg^2\left(1 + \dfrac{4}{x}\right) + \lg^2\left(1 - \dfrac{4}{x+4}\right) = 2\lg^2\left(\dfrac{2}{x-1} - 1\right)$.

21. ▲ а) $\log_2 x^4 + \log_a x^2 = 1$;

б) $\log_2(x - 1) - \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+3} = \log_8(x - a)^3 + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3)$;

▲ в) $\log_2(6x^2 + 25x) = 1 + \log_2(ax + 4a - 2)$.

22. ▲ а) $\log_3 x \log_4 x \log_5 x =$

$= \log_3 x \log_4 x + \log_4 x \log_5 x + \log_5 x \log_3 x$;

● б) $\left(\log_3 \dfrac{3}{x}\right)\log_2 x - \log_3 \dfrac{x^3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + \log_2\sqrt{x}$.

23. а) $\lg(10x^2)\cdot\lg x = 1$;

б) $\dfrac{\log_2 x - 1}{\log_2 \dfrac{x}{2}} = 2\log_2\sqrt{x} + 3 - \log_2^2 x$;

в) $2\log_9 x + 9\log_x 3 = 10$;

г) $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x = 1$.

24. ● а) $\log_x\sqrt{5} + \log_x 5x = \dfrac{9}{4} + \log_x^2\sqrt{5}$;

б) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$;

● в) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) = 4 - \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21)$;

● г) $\lg^2(4 - x) + \lg(4 - x)\lg\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - 2\lg^2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

25. ● а) $(x^2\log_x 27)\log_9 x = x + 4$;

● б) $\log_x 2 - \log_4 x + \dfrac{7}{6} = 0$;

▲ в) $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$;

г) $4\log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x} + 2\log_{4x} x^2 = 3\log_{2x} x^3$;

д) $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$;

е) $\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10\right)\lg(x^2 - 3x + 2) = (\lg(x - 3))\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 - 2$.

26. а) $\dfrac{\log_x(2a - x)}{\log_x 2} + \dfrac{\log_a x}{\log_a 2} = \dfrac{1}{\log_{a^2-1} 2}$;

б) $\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a\cdot\log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$.

27. ● а) $\sqrt{1 + \log_{0,04} x} + \sqrt{3 + \log_{0,2} x} = 1$;

б) $\sqrt{2 - \log_x 9} = -\dfrac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$;

● в) $\log_x(x^2 + 1) = \sqrt{\log_{\sqrt{x}}(x^2(1 + x^2)) + 4}$;

● г) $\sqrt{\log_2 x} - 0,5 = \log_2\sqrt{x}$.

28. а) $\lg(3^x - 2^{4-x}) = 2 + \frac{1}{4}\lg 16 - \frac{x}{2}\lg 4$;

б) $\log_3\left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x$;

в) $\log_3\left(3^{x^2-13x+28} + \frac{2}{9}\right) = \log_5 0{,}2$.

29. а) $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$;

б) $\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = x + \lg 5$.

30. а) $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_5(2^x - 2)^2 = 2$;

б) $x(1 - \lg 5) = \lg(4^x - 12)$;

в) $\log_2(4^x + 1) = x + \log_2(2^{x+3} - 6)$;

г) $\log_3(9^x + 9) = x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2\cdot 3^x)$;

д) $\log_2\left(\frac{8}{2^x} - 1\right) = x - 2$;

е) $\log_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4\right)$.

31. а) $(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1)$; б) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5+\lg x}$;

в) $3^{\lg x} = 54 - x^{\lg 3}$; г) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$.

32. $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$.

33. $(3^{x^2-7{,}2x+3{,}9} - 9\sqrt{3})\lg(7-x) = 0$.

34. ● $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2\cdot 3^{\log_x(3x-2)} = 5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}$.

35. $\left|1 - \log_{\frac{1}{5}} x\right| + 2 = \left|3 - \log_{\frac{1}{5}} x\right|$.

36. ▲ $\log_4(6 + \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|) = \frac{1}{2} + \log_2|\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2||$.

37. ▲ а) $5^x + 12^x = 13^x$; б) $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$;

● в) $2^x = 1 - x$; г) $\log_2(4-x) = x - 3$.

38. Известно, что $x = 9$ является корнем уравнения

$$\log_\pi(x^2 + 15a^2) - \log_\pi(a-2) = \log_\pi\frac{8ax}{a-2}.$$

Найдите другие корни этого уравнения.

Решите систему уравнений:

39. а) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{a^2} x - \log_{a^4} y = 3, \\ \log_{a^6} x + \log_{a^8} y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{x+y-1} + 2^{x-y+1} = 3, \\ \frac{1}{7} \cdot 3^{x\log_3 2 + y\log_3 2 - 2} + 3^{x\log_3 2 - y\log_3 2 - 2} = \frac{1}{7}. \end{cases}$

40. а) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{\log_x 2} = \log_3(x+y), \\ x^2 + y^2 = 65. \end{cases}$

41. ● а) $\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (3y^2+1)\log_3 x = 1, \\ x^{2y^2+10} = 27. \end{cases}$

42. а) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 2, \\ x - y = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2, \\ \log_3(x+y) = 2; \end{cases}$ ● г) $\begin{cases} 4^{-y}\log_2 x = 4, \\ \log_2 x + 2^{-2y} = 4. \end{cases}$

43. ● а) $\begin{cases} y + \lg x = 1, \\ x^y = 0{,}01; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x \cdot 8^{-y} = 2\sqrt{2}, \\ \log_9 \frac{1}{x} + 0{,}5 = \frac{1}{2}\log_3 9y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (\log_a(xy) - 2)\left(\log_a \frac{4}{9}\right)^{-1} = -1, \\ x + y = 5a. \end{cases}$

44. ● а) $\begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5, \\ xy = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2{,}5, \\ x + y = a^2 + a. \end{cases}$

45. а) $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 28, \\ \log_9 x + \log_{\frac{1}{9}} y = 1{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2 y = \log_4(xy-2), \\ \log_9 x^2 = \log_3(x-y) = 1. \end{cases}$

46. а) $\begin{cases} 2^{x^2+y} = 4^{(y^2+x)/2}, \\ \sqrt{xy} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} - \frac{3y}{x}} = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{2y} = \sqrt{12} - \sqrt{8}. \end{cases}$

47. $\begin{cases} x + y = 4 + \sqrt{y^2 + 2}\,, \\ \lg x - 2\lg 2 = \lg(1 + 0{,}5y). \end{cases}$

48. $\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1, \\ xy^2 = 4. \end{cases}$

49. ● $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\sqrt[y]{9} = 9^{\frac{x}{2y}}, \\ \dfrac{x+3y}{x} = \dfrac{2x}{y} - 4. \end{cases}$

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Показательные неравенства. Пусть дано показательное неравенство $a^{f(x)} > b$, где $a > 0$.

1. Если $b \leqslant 0$, то $x \in D(f)$.
2. Если $b > 0$, $a > 1$, то $f(x) > \log_a b$.
3. Если $b > 0$, $0 < a < 1$, то $f(x) < \log_a b$.
4. Если $a = 1$, то $x \in D(f)$ при $b < 1$; $x \in \varnothing$ при $b \geqslant 1$.

Пример 1. Решить неравенство $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$.

▲ Положим $2^x = t$, тогда получим эквивалентное неравенство

$$2t^2 - 5t + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t - 2) \leqslant 0, \text{ т. е. } \frac{1}{2} \leqslant 2^x \leqslant 2, -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ответ: $x \in [-1; 1]$.

Пример 2. Решить неравенство $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 > 0$.

▲ Пусть $3^x = t$, тогда получим неравенство

$$t^2 - 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1, \\ t > 3, \end{array}\right. \text{ или } 3^x < -1,\ x \in \varnothing \text{ и } 3^x > 3,\ x > 1.$$

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

П р и м е р 3. Решить неравенство $a^{x^2 - x} < a^2$.

▲ Рассмотрим три случая: 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$; 3) $a = 1$ (по определению основание показательной функции положительно).

1. Пусть $a > 1$. Тогда заданное неравенство равносильно неравенству $x^2 - x < 2$, решив которое получаем $-1 < x < 2$.

2. Пусть $0 < a < 1$. Тогда заданное неравенство равносильно неравенству $x^2 - x > 2$, решив которое получаем $x < -1$, $x > 2$.

3. Пусть $a = 1$. Тогда $1^{x^2 - x} < 1^2$, т. е. $x \in \varnothing$.

О т в е т: если $a > 1$, то $x \in (-1;\ 2)$;
если $0 < a < 1$, то $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$;
если $a = 1$, то $x \in \varnothing$.

П р и м е р 4. Решить неравенство $x^{\log_a x} < a^2 x$.

▲ Здесь возможны два случая: 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$.

1. Если $a > 1$, то при логарифмировании и потенцировании знак неравенства сохраняется. Прологарифмировав по основанию $a > 1$, получаем неравенство

$$\log_a^2 x - \log_a x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < \log_a x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < x < a^2.$$

2. Если $0 < a < 1$, то как при логарифмировании, так и при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный. Прологарифмировав по основанию $0 < a < 1$, получаем неравенство

$$\log_a^2 x - \log_a x - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x < -1, \\ \log_a x > 2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < a^2, \\ x > \dfrac{1}{a}. \end{array}\right.$$

О т в е т: если $a > 1$, то $x \in \left(\frac{1}{a};\ a^2\right)$;

если $0 < a < 1$, то $x \in (0;\ a^2) \cup \left(\frac{1}{a};\ +\infty\right)$.

Логарифмические неравенства. При решении логарифмических неравенств нужно учитывать, что функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Поэтому неравенство вида

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$$

при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 5. Решить неравенство $\log_3 (x^2 - 2x) < 1$.

▲ Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x < 3, \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) < 0, \\ x(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0, \\ 2 < x < 3. \end{array} \right.$$

Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (2; 3)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + x + 2) < \log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 18).$$

▲ Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x + 2 > 2x^2 - 18, \\ 2x^2 - 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 < 0, \\ (x-3)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x+4) < 0, \\ (x-3)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -3, \\ 3 < x < 5. \end{array} \right.$$

Ответ: $x \in (-4; -3) \cup (3; 5)$.

Пример 7. Решить неравенство $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} (2 - x) < 2$.

▲ Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (2-x) < 4, \\ \log_{\frac{1}{2}} (2-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > \dfrac{1}{16}, \\ \begin{cases} 2 - x < 1, \\ 2 - x > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{31}{16}.$$

Ответ: $x \in \left(1; \dfrac{31}{16}\right)$.

П р и м е р 8. Решить неравенство $\log_{3x+4} x^2 < 1$.

▲ Найдем область определения неравенства, для чего решим систему

$$\begin{cases} x^2 > 0, \\ 3x + 4 > 0, \\ 3x + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Возможны два случая: 1) $0 < 3x + 4 < 1$; 2) $3x + 4 > 1$.

1. Если $0 < 3x + 4 < 1$, то данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < 3x + 4 < 1, \\ x^2 > 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{3}, \\ x < -1, \\ (x + 1)(x - 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right).$$

2. Если $3x + 4 > 1$, то данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x + 4 > 1, \\ x^2 < 3x + 4, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ -1 < x < 4, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 4).$$

О т в е т: $x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 4)$.

Решите неравенство:

1. ▲ а) $\lg(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$; б) $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2$;

в) $2 - \log_2(x^2 + 3x) \geqslant 0$; г) $\log_{1,5} \frac{2x - 8}{x - 2} < 0$.

2. а) $\log_3 \frac{1 + 2x}{1 + x} < 1$; б) $\log_4 \frac{3x + 2}{x} \leqslant 0{,}5$;

в) $\log_2 \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} \leqslant 1$; г) $\log_2^2 \frac{4x - 3}{4 - 3x} > -\frac{1}{2}$.

3. а) $\log_{\frac{1}{5}}(2x^2 + 5x + 1) < 0$; б) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 2x) > 0$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 6) < -2$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{x + 2} < 1$;

д) $\log_{0,25} \frac{35 - x^2}{x} \geqslant -\frac{1}{2}$.

4. ▲ а) $\log_5(2x-4) < \log_5(x+3)$;

● б) $\log_{0,1}(x^2+x-2) > \log_{0,1}(x+3)$;

в) $\lg\sqrt{x^2-3x+4} - \lg\sqrt{x+1} > 0$;

● г) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leqslant \log_2(2-x)$;

д) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1)$.

5. ▲ а) $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2$;

б) $\lg(x-1) + \lg(x-2) < \lg(x+2)$;

в) $\log_2(2-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\sqrt{2}} 3$;

г) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+5) - \log_{\frac{1}{5}}(16-x^2) \leqslant 1$;

6. а) $\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{x}{4}\right) \geqslant 1$;

б) $\log_7 x - \log_7(2x-5) \leqslant \log_7 2 - \log_7(x-3)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$;

г) $1\mathrm{og}_2 x^2 + \log_2(x-1)^2 > 2$.

7. а) $2^x > 5$;

б) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \dfrac{27}{64}$;

в) $(0,5)^{\log_2(x^2-2x-3)} > 1$;

г) $3^{\log_2(x^2-3x+2)} > 3$;

д) $5^{\log_3\frac{x-2}{x}} < 1$;

е) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\dfrac{1}{9}\right)^{16-x}$;

ж) $3^{\sqrt{x}} > 2^a$.

8. ▲ а) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 \geqslant 0$;

● б) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{2}$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \dfrac{5}{2}$;

● г) $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^5}{4}\right)^2 - 20\log_2 x + 148 < 0$;

● д) $(2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 8)(2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 6) \geqslant 3$;

е) $(\log_2^2 x + 3\log_2 x + 1)(\log_2^2 x + 3\log_2 x - 3) < 5$;

ж) $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$.

9. ● а) $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0$; ● б) $0{,}1^{x+1} < 0{,}8 + 2 \cdot 10^x$;

в) $2^x + 2^{-x} < 3$; ● г) $3^{4-3x} - 35 \cdot 3^{3x-2} + 6 \geqslant 0$;

д) $\frac{6}{2^x - 1} < 2^x$; ● е) $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$;

● ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg x^2} + 2 > 3 \cdot 2^{-\lg(-x)}$.

10. а) $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 2) > 2$; б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$;

● в) $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1)\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$;

г) $\lg(1 + 2^{x+1}) > \frac{(x\lg 2)\lg 4}{\lg 8} + \lg 3$.

11. а) $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}} < 1$; б) $\sqrt{\log_3(9x-3)} \leqslant \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right)$;

в) $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3^x$.

12. а) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$; б) $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$.

13. а) $\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3} - x) > 0$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5-x} - x + 1) > -3$.

14. а) $x^{\log_2 x - 2} > \frac{x}{4}$; б) $x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} > 1000$;

в) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}} \geqslant 2$.

15. ▲ а) $\log_a(x-1) + \log_a x > 2$;

б) $\frac{1}{5 - \log_a x} + \frac{2}{1 + \log_a x} < 1,\ 0 < a < 1$;

в) $\frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1$; г) $\log_a(1 - 8a^{-x}) \geqslant 2(1 - x)$.

16. ▲ а) $\log_{x-3}(x-1)<2$; б) $\log_x(x+2)>2$.

17. а) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$; б) $\log_{x+3}(x^2-x)<1$;

в) $\log_{3x+5}(9x^2+8x+2)>2$; г) $\log_{2x+4}(x^2+1)\leqslant 1$;

д) $\log_x \dfrac{15}{1-2x}<-2$.

18. а) $\log_{x^2}(3-2x)>1$; б) $\log_{x^2+3x}(x+3)<1$.

19. а) $\log_{\frac{2}{3}|x-2|} 2^{1-x^2}\geqslant 0$; б) $\log_{\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)}(x^2-10x+22)>0$.

20. а) $|x|^{x^2-x-2}<1$; б) $\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|^{x^2-18x+56}>1$.

21. а) $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$; б) $-\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2+8}}\geqslant 0$;

в) $\dfrac{\log_{0,5}x+2}{\sqrt{2x-1}}>0$; г) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)}<0$.

22. ● а) $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$;

● б) $\log_5 x+\log_x\dfrac{x}{3}>\dfrac{(\log_5 x)(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$;

в) $\dfrac{1}{\log_4\dfrac{x+1}{x+2}}\leqslant\dfrac{1}{\log_4(x+3)}$.

Решите систему неравенств:

23. ● $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}\geqslant 0,\\ 2^{x-3}-31>0.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\log_2^2 x-3\log_2 x+2}}{\log_5\left(\dfrac{1}{3}(\log_3 5-1)\right)}\geqslant 0,\\ x-\sqrt{x}-2\geqslant 0.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{81}\right)^{8+\log_a x}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x},\\ 0<x<1.\end{cases}$

§ 3. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЯМИ

1. Выясните, какие из указанных ниже функций четные и какие нечетные: а) $y = 2^{-x^2}$; б) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$; в) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$; г) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$; д) $y = x\frac{a^x - 1}{a^x + 1}$; е) $y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$; ж) $y = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$.

2. ▲ Функцию $y = 3^x$ представьте в виде суммы четной и нечетной функций.

3. Дана функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$. Найдите наименьший положительный период этой функции. Является ли она нечетной?

4. Для функции $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ найдите обратную функцию.

Постройте график функции:

5. $y = 3^{-|x|}$.

6. $y = \log_2 (1 - x)$.

7. $y = |\log_2 (1 - x)|$.

8. $y = \log_2 (2 - x)^2$.

9. $y = \frac{|\ln x|}{\ln x}$.

10. $y = x^{\log_x 2}$.

11. $y = e^{|\ln x|}$.

12. $y = \log_2 (x^2 - 2x)$.

13. $y = \log_2 \left|\frac{x}{x - 1}\right|$.

14. $y = \log_2 \sin x$.

15. Постройте график уравнения $|y| = \log_2 (-x)$.

Найдите производную функции:

16. а) $y = 3^x$; б) $y = 10^x$; в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

г) $y = e^x + e^{-x}$; д) $y = 2e^x - 2e^{-x}$; е) $y = 3^x + 4^x$.

17. а) $y = x \cdot 10^x$; б) $y = xe^x$; в) $y = \frac{x}{e^x}$;

г) $y = \sqrt{2^x}$; д) $y = e^{x^3 - 5x^2}$; е) $y = \frac{e^x}{1 + x}$.

18. а) $y = \log_3 x$; б) $y = \log_2 x + \log_{\frac{1}{3}} x$; в) $y = \log_5 \sqrt{x}$;

г) $y = \log_7 x^5$; д) $y = x + \ln x$; е) $y = x \ln x$.

19. а) $y = \ln^2 x$; б) $y = \sqrt{\ln x}$; в) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$; г) $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$.

20. В точке x_0 найдите значение производной функции:

а) $y = 4^x$, $x_0 = 2$; б) $y = e^{-x}$, $x_0 = \ln 3$;

в) $y = \ln (x^2 - 4x)$, $x_0 = 5$; г) $y = x \ln^2 x$, $x_0 = e$.

21. В указанной точке $K(x_0; y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой: а) $y = e^x$, $K(0; 1)$; б) $y = \ln x$, $K(1; 0)$.

Найдите критические точки функции:

22. а) $y = 2^x - x \ln 2 + 1$; б) $y = e^x(-x^2 + 4x - 1)$;

в) $y = e^{-x}(x^2 + 5x + 7)$; г) $y = xe^{x - x^2}$;

▲ д) $y = e^{-2x} + (6 - 2a)e^{-x} + 6ax + \operatorname{ctg} 3$;

е) $y = (0{,}2)^{2x} + (2a + 2)\left(\frac{1}{5}\right)^x - (2a \ln 5)\, x + \ln 3$;

ж) $y = e^{|x|} - 2x + 1$.

23. а) $y = \ln (4x - x^2)$; б) $y = \ln^2 x - 6 \ln x + 5$;

в) $y = 4 \ln 3 - 16 \ln (x^2 + 3x) + 0{,}5\,(x^2 + 3x)^2$.

24. Определите интервалы монотонного возрастания функции

$$f(x) = 0{,}3125 \left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2 - 8x} + 5 \ln 2\,(3x^2 - 8x + 1).$$

25. Определите интервалы монотонного убывания функции $f(x) = x^2 \ln 27 - 6x \ln 27 + (3x^2 - 18x + 24) \ln (x^2 - 6x + 8)$.

26. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

а) $y = x - e^x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$; б) $y = \frac{x}{\ln x} - \frac{\ln 3}{3}$; в) $y = (2^x - 1)(2^x - 2)$.

27. Найдите точки экстремума функции:

а) $y = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2} x^2 + 4x + 1$;

б) $y = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x - \frac{x^2}{4} + x - 1$.

28. ▲ Найдите значения a и b, при которых функция $f(x) = a \ln x + bx^2 + x + 2$ имеет экстремумы в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

29. В указанном промежутке найдите наибольшее и наименьшее значения функции: а) $y = e^{-x}(x^2 + x - 5)$, $x \in [-4; 4]$; б) $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$, $x \in [-1; 2]$; в) $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{3x} + 2 \cdot 3^x$, $x \in [-1; 1]$; г) $y = |x^2 + 2x - 3| + 1{,}5 \ln x$, $x \in [0{,}5; 4]$.

30. При каком значении x выражение $2^{x^2} - 1 + \frac{2}{2x^2+2}$ принимает наименьшее значение?

31. Решите неравенство $f'(x) < g'(x)$, если:

а) $f(x) = x + 3\ln(x-2)$, $g(x) = x + 5\ln(x-1)$;

б) $f(x) = e^{2x} - 3x$, $g(x) = 5(e^x - x + 3)$.

32. Докажите, что для всех $x \in (0; +\infty)$ справедливо неравенство: ▲ а) $e^x > 1 + x$; ● б) $x > \ln(1+x)$.

Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график:

33. $y = xe^{-x}$. **34.** $y = \ln(x^2+1)$.

Решите уравнение:

35. ▲ а) $25^x - 29 \cdot 10^{x-1} + 4^x = 0$;

б) $3^{2x+1} + 4 \cdot 16^x = 7 \cdot 12^x$;

в) $27 \cdot 4^x - 30 \cdot 6^x + 8 \cdot 9^x = 0$;

г) $7 \cdot 49^{x+1} - 210 \cdot 21^x + 3 \cdot 9^{x+1} = 0$.

36. ▲ а) $2 \cdot x^{\log_5 4} + 5 \cdot 2^{\log_5 x} - 3 = 0$;

б) $3 \cdot x^{\log_2 9} + 5 \cdot 3^{\log_2 x} - 2 = 0$;

в) $25 \cdot x^{\log_7 x} + 24 \cdot 5^{\log_7 x} - 1 = 0$;

г) $(x-1)^{\log_3 49} + 97 \cdot 7^{\log_3(x-1)} - 2 = 0$.

37. ▲ а) $2^x \cdot 3^{x - \log_3 2} - 6^{2-x} + 3 = 0$;

б) $5^{x+1} \cdot 2^{x + \log_2 6} = 2 \cdot 10^{-x-1} + 1$;

в) $3^{x + \log_3 4} \cdot 2^{1-x} = 2^{x + \log_2 9} \cdot 3^{1-x}$;

г) $2^{x + \log_2 7} \cdot 3^{(x^2+x)\log_3 7} = 343$.

38. ▲ а) $\sqrt{\frac{2^x - 3}{2^{x-2}}} + 1 = \frac{2^{0,5x}}{\sqrt{2^x - 3}}$; б) $\sqrt{1 + \frac{1}{3^x}} - \sqrt{\frac{3^x}{3^x+1}} = \frac{3}{2}$;

в) $\frac{\sqrt{4^x+6}}{2^{x-2}} - \frac{2^{x+1}}{\sqrt{4^x+6}} = 7$;

г) $3 \cdot \sqrt{\frac{5^{x+1}+7}{5^{x+1}}} - 30 \cdot \sqrt{\frac{5^{x-1}}{5^{x+1}+7}} = 17$.

39. ▲ а) $9\log_8^2(x-3)^4 + 48\log_4(x-3)^2 = 64$;

б) $9\log_{27}^2(x+5)^4 - 32\log_9(x+5)^2 = 48$;

в) $25\log_{32}^2(x-7)^4 + 16\log_4(x-7)^2 = 96$;

г) $9\log_{125}^2(x+1)^4 - 16\log_{25}(x+1)^2 = 32$.

Решите неравенство:

40. ▲ а) $9^x + 6^x \leqslant 5\cdot 3^x$; б) $16^x + 20 \geqslant 9\cdot 4^x$;

в) $4^x + 2 \leqslant 3\cdot 2^x$; г) $25^x + 35 \geqslant 12\cdot 5^x$.

41. ▲ а) $\log_7 x - \log_x \dfrac{1}{7} > 2$; б) $\log_3 x - 2\log_x \dfrac{1}{9} \geqslant 5$;

в) $\log_2 x + \log_x 4 > 3$; г) $\log_2 x - 4\log_x \dfrac{1}{8} \geqslant 7$.

42. ▲ а) $x^{2+\log_{\sqrt[3]{2}} x} \geqslant 2$; б) $x^{1+\frac{1}{\log_x \sqrt[3]{3}}} \leqslant 9$;

в) $x^{\log_{\frac{1}{2}} x} \leqslant 4x^3$; г) $x^{\frac{1}{\log_x \frac{1}{3}}} \leqslant 27x^4$.

43. ▲ а) $(2x^2 - 3x + 1)\log_{4x+5}(2x+3) \geqslant 0$;

б) $(2x^2 - x - 1)\log_{4-3x}(7-5x) \leqslant 0$;

в) $(3 + x - 2x^2)\log_{x+2}(3x+5) \geqslant 0$;

г) $(1 - x - 6x^2)\log_{2-3x}(1-2x) \leqslant 0$.

44. ▲ а) $\dfrac{(\lg x - 1)(x^2 - 11x + 10)}{(2^x - 2)^2} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{(\log_x 2 - 1)(x^2 - 3x + 2)}{4^x - 2} \leqslant 0$;

в) $\dfrac{(3^x - 2)^2(x^2 - 5x + 6)}{\log_2 x - 1} \geqslant 0$;

г) $\dfrac{(5 - 7^x)\log_3 x}{x^2 - 10x + 9} \geqslant 0$.

45. ▲ а) $\log_2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) \leqslant 1$;

б) $\log_3\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) - \log_{\frac{1}{3}}\left(1 - \dfrac{3}{x+1}\right) < 1$;

в) $\log_{\sqrt{2}}\left(3+\frac{5}{x+1}\right)+\log_{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{2}{x}\right)\geqslant 1$;

г) $\log_5\left(\frac{3}{x}-1\right)+\log_{\frac{1}{5}}\left(3+\frac{1}{x-1}\right)\leqslant 1$.

46. ▲ а) $\log_{2x+7}(x^2+4x+4)<2\log_{x^2}|x|$;

б) $\log_{2x-4}(x^2-9x+20)<\frac{1}{2}\log_{|x-6|}(x-6)^2$;

в) $\log_{2x+3}(x^2+x-9)>2\log_{(x-6)^2}|6-x|$;

г) $\log_{2x-6}(x^2-11x+30)<\frac{1}{2}\log_{|7-x|}(x-7)^2$.

47. а) $\frac{\lg^2 x+2\lg x-6}{\lg x}<1$;

б) $\log_2(2^x+1)+\log_2 3>\log_2(2^x-1)+x+1$.

48. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=\frac{5}{2},\\ xy=27.\end{cases}$$

49. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=2\cdot 3^{3x}-4\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

Глава III

Тригонометрия

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Основные формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad (1)$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (2)$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \quad (3)$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad (4)$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \ \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}; \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \ \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}; \quad (7)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (8)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \ \alpha, 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}; \quad (10)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad (11)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad (12)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (13)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad (14)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (15)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad (16)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)); \tag{17}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\,(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)); \tag{18}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)); \tag{19}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \tag{20}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \tag{21}$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \tag{22}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{23}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\ \alpha \ne \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{24}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \alpha \ne \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{25}$$

$$|\sin\alpha| = \frac{|\operatorname{tg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\ \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{26}$$

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\ \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{27}$$

$$|\sin\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\ \alpha \ne \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{28}$$

$$|\cos\alpha| = \frac{|\operatorname{ctg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\ \alpha \ne \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{29}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \alpha \ne \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{30}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \alpha \ne \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{31}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}; \qquad (32)$$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \alpha), \qquad (33)$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$$\operatorname{Arcsin} a = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \qquad (34)$$

$$\operatorname{Arccos} a = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \qquad (35)$$

$$\operatorname{Arctg} a = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \qquad (36)$$

$$\operatorname{Arcctg} a = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (37)$$

1. Докажите тождество:

а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$; б) $\frac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$.

2. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = a$, найдите:
а) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$; ● б) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

3. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = p$. Найдите:
а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

4. Найдите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

▲ б) $\cos(70° + \alpha)$, если $\sin(40° + \alpha) = b$, $0 < \alpha < 45°$;

● в) $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$, если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{8}{17}$, $\sin\gamma = \frac{4}{5}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$;

● г) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5. ● Дано: α, β, γ — углы треугольника. Докажите равенство $\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Докажите тождество:

6. а) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; б) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$; г) $\frac{1 - 2\sin^2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta}$;

д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; е) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha$;

ж) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\,\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha.$

7. а) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\,\operatorname{ctg}^2\beta} = -\cos^2\alpha\sin^2\beta;$

б) $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\sin^4\alpha;$

в) $\cos^4\alpha = \frac{1}{8}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8};$

г) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2\alpha).$

8. а) $4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1 + 3\cos^3 2\alpha;$

б) $8\left(\sin^8\frac{\alpha}{2} + \cos^8\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + 6\cos^2\alpha + \cos^4\alpha;$

в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = -\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x;$

г) $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4\cos x\cos 2x\cos 3x.$

9. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha};$ б) $\dfrac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha};$

в) $\dfrac{\sin\alpha - 3\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 3\cos 2\alpha + \cos 3\alpha};$ г) $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha};$

▲ д) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7};$

● е) $\cos 0 + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \ldots + \cos\frac{6\pi}{7}.$

Докажите тождество:

10. а) $\dfrac{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \operatorname{tg} 2\alpha\cos\alpha;$

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right);$

в) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2};$

г) $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4};$

д) $\log_{\frac{1}{3}}\left[\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta\right] = 0;$

е) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha = \sin 8\alpha;$

11. ▲ а) $16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ = 1;$

● б) $\sin^2\alpha\cos^4\alpha = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2\alpha - \frac{1}{16}\cos 4\alpha - \frac{1}{32}\cos 6\alpha;$

● в) $\sin 9\alpha + 3\sin 7\alpha + 3\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 8\sin 6\alpha\cos^3\alpha;$

г) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \operatorname{tg}(\beta-\gamma) + \operatorname{tg}(\gamma-\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha);$

д) $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

12. ▲ Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

13. ▲ Положительные острые углы α, β, γ удовлетворяют соотношениям $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. Найдите сумму $\alpha + \beta + \gamma$.

Без помощи таблиц и микрокалькулятора вычислите:

14. ▲ а) $\cos 292°30'$; ▲ б) $\operatorname{cosec} 10° - \sqrt{3}\sec 10°$;

▲ в) $\frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$;

▲ г) $-2\sqrt{2}\sin 10°\left(2\sin 35° - \frac{\sec 5°}{2} - \frac{\cos 40°}{\sin 5°}\right)$;

▲ д) $\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 73°\cos 47°$;

▲ е) $\sin 6° - \sin 42° - \sin 66° + \sin 78°$.

15. а) $\frac{\cos^2 33° - \cos^2 57°}{\sin 21° - \cos 21°}$; б) $6\cos 40° - 8\cos 40°$;

● в) $\operatorname{tg}^6 20° - 33\operatorname{tg}^4 20° + 27\operatorname{tg}^2 20° - 3$; ▲ г) $\operatorname{ctg}^2 36°\operatorname{ctg}^2 72°$;

д) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$;

е) $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

16. а) $8\cos 10°\cos 50°\cos 70°$; б) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$;

в) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$; г) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \sqrt{3}\operatorname{tg} 20°\operatorname{tg} 40°$;

● д) $\sin 54° - \sin 18°$; е) $4\sin 54°\cos 72°$.

17. Докажите, что если $\alpha = \beta + \gamma$, то:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

18. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то:

а) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

19. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то:

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

б) $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

в) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

20. Найдите зависимость между x и y, исключив α из соотношений:

а) $\begin{cases} x = 3\cos\alpha, \\ y = 4\sin\alpha; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2 = -2\cos\alpha, \\ y = 4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} = \operatorname{tg}\alpha, \\ \sqrt{y} = \sec\alpha; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = \sqrt{1-\cos\alpha}, \\ y = \sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\sin x - \cos x}$; б) $y = \sqrt{2\cos x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}$;

в) $y = \sqrt{(2\cos x + 1)(\cos x - 1)}$; г) $y = \sqrt{\sin x(\operatorname{tg}^2 x - 3)}$;

д) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

2. Найдите множество значений функции:

а) $y = 9\cos 3x - 12\cos^3 3x$; б) $y = \cos(2\sin x)$;

в) $y = \cos\left(1 - \dfrac{1}{x^2+1}\right)$; г) $y = 12\sin x + 5\cos x - 3$;

д) $y = 1 - 2\sin x\cos x$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

▲ а) $y = a\cos x + b\sin x + c$;

● б) $y = 10\cos^2 x - 6\sin x\cos x + 2\sin^2 x$.

4. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$, заданной на множестве $X = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x \in X$.

5. ● Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2(1 + \sin 3x\sin 2x) - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 6x).$$

6. ● Докажите, что функция
$y = \sin 5x + \sin 3x + 5\sin x\cos 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$, является нечетной.

7. ● Докажите, что функция

$y = \cos 4x + \sin^3\dfrac{x}{2}\sin x + 5x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, является четной.

8. Найдите наименьший положительный период функции:

▲ а) $y = \sin 3x$; ● б) $y = \operatorname{tg} 2x + 2 \sin 3x$; в) $y = \cos \frac{x}{2}$;

● г) $y = \cos^2 x$; д) $y = \sin (\cos x)$; е) $y = \cos (\sin x)$;

ж) $y = \cos \frac{3x}{5} - \sin \frac{2x}{7}$.

9. ● Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справедливо двойное неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

10. ▲ Докажите, что при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ справедливо двойное неравенство

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

● **11.** Найдите сумму:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$, $x \neq 2\pi n$;

б) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$, $x \neq 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Постройте график функции:

12. а) $y = \sin 2x$; б) $y = -\sin \frac{x}{3}$; в) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$;

г) $y = \sin |x|$; д) $y = |\sin x|$; е) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$.

13. а) $y = x + \sin x$; б) $y = x \sin x$; в) $y = \operatorname{cosec} |x|$;

г) $y = 2^{\sin x}$; д) $y = \sin (\arcsin (\log_{0,5} x))$.

14. а) $y = \cos \left(-\frac{x}{2} \right)$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$;

г) $y = |\cos x|$; д) $y = \sec x$.

15. а) $y = \operatorname{tg} 3x$; б) $y = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; в) $y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$;

г) $y = \operatorname{tg} |x|$; д) $y = |\operatorname{tg} x|$; е) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

16. Постройте график:

а) $|y| = \sin x$; б) $\sin y = \sin x$.

Найдите производную функции:

17. а) $y = \sin x - \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; в) $y = \sin^2 x$;

г) $y = \cos^2 x$; д) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$; е) $y = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x$.

18. а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$; в) $y = \sin^2(2x - 1)$;

г) $y = \cos^3(x^2 + x)$; д) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

19. В указанной точке x_0 найдите значение производной функции: а) $y = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$; б) $y = \cos(-2x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; в) $y = \operatorname{tg} x - x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

20. В указанной точке $A(x_0;\ y_0)$ составьте уравнение касательной к кривой: а) $y = 2\sin\dfrac{x}{3}$, $A\left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\right)$; б) $y = \cos^2 x$, $A\left(\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{1}{2}\right)$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$, $A\left(\dfrac{\pi}{8};\ 1\right)$.

21. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin^2 x - 20\cos x + 1$.

22. ▲ Докажите, что функция

$$f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

есть постоянная, т. е. не зависит от x. Найдите значение этой постоянной.

§ 3. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Докажите, что:

$\sin(\arcsin x) = x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};\ \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$\cos(\arccos x) = x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};\ \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;\ \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},\ -1 < x < 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x},\ -1 \leqslant x < 0,\ 0 < x \leqslant 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0;$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ -1 \leqslant x < 0,\ 0 < x \leqslant 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1.$$

Вычислите:

2. ▲ а) $\sin\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$; б) $\cos\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$; ▲ г) $\sin\left(2 \operatorname{arctg} 3\right)$; д) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3)$.

3. ▲ а) $\sin\left(3 \arcsin \frac{1}{3}\right)$; б) $\cos\left(3 \arccos \frac{1}{4}\right)$.

4. ▲ а) $\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3\right)$; б) $\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5\right)$; в) $\sin\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9}\right)$.

5. а) $\sin\left(\frac{1}{4} \arccos \frac{17}{32}\right)$; б) $\sin\left(\frac{1}{4} \arcsin \frac{\sqrt{63}}{8}\right)$;

в) $\cos\left(\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{24}{7}\right)$.

6. Докажите, что:

▲ а) если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$, $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$;

б) если $0 \leqslant x < 1$, то $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) если $0 < x \leqslant 1$, то $\arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

г) если $x > 0$, то $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$

$= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7. Выразите через все обратные тригонометрические функции:

а) $\arcsin \frac{3}{5}$; б) $\arccos \frac{12}{13}$; в) $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$; г) $\operatorname{arcctg} \frac{3}{4}$.

8. Докажите, что:

▲ а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

▲ в) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

9. Выразите через все обратные тригонометрические функции:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$.

10. Докажите, что:

▲ а) если $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right),$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right),$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$\arccos x - \arccos y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right);$$

б) если $x > 0$, $y > 0$, то

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{1-xy}{x+y},$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy-1}{x+y},$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy},$$

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arctg} \frac{y-x}{1+xy}.$$

11. Выполните указанные действия:

а) $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{12}{13}$; б) $\arccos \frac{7}{25} + \arccos \frac{3}{5}$;

в) $\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 5$; г) $\arcsin \frac{3}{5} - \arcsin \frac{24}{25}$;

д) $\arccos \frac{5}{13} - \arccos \frac{7}{25}$; е) $\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 5$;

ж) $\operatorname{arcctg} 5 - \operatorname{arcctg} 4$.

12. Докажите, что:

▲ а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

▲ б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

13. Решите уравнение:

а) $5 \operatorname{arctg} x + 3 \operatorname{arcctg} x = 2\pi$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \pi$.

14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$\arcsin^3 x + \arccos^3 x.$$

15. Докажите, что:

▲ а) $\arcsin (\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } 2\pi n - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x + 2\pi n, & \text{если } 2\pi n + \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi n + \frac{3\pi}{2}; \end{cases}$$

б) $\arccos (\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi n + \pi, \\ 2\pi - x + 2\pi n, & \text{если } 2\pi n + \pi \leqslant x \leqslant 2\pi(n + 1); \end{cases}$

в) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x) = x - \pi n$, если $\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \pi n + \frac{\pi}{2}$;

г) $\operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} x) = x - \pi n$, если $\pi n < x < \pi(n + 1)$.

16. Вычислите:

а) $\arcsin \left(\sin \frac{10\pi}{7}\right)$; ▲ б) $\arccos \left(\sin \left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$;

в) $\arcsin \left(\cos \frac{33\pi}{10}\right)$.

17. Вычислите: $\arcsin (\sin x)$; $\arccos (\cos x)$; $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} x)$; $\arcsin (\cos x)$; $\arccos (\sin x)$, если:

а) $x = 3$; б) $x = 4$; в) $x = 10$.

18. Решите уравнение $\cos(\pi \operatorname{arcctg}^2 x) = \frac{1}{2}$.

19. Вычислите без таблиц и микрокалькулятора:

а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$;

б) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$;

г) $\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 4 + \operatorname{arcctg}\frac{7}{11}$.

Постройте график функции:

20. ● а) $y = \arcsin(\sin x)$; б) $y = \arccos(\cos x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$;

д) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; е) $y = \arccos\frac{1}{x}$.

21. а) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$; б) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1}$;

в) $y = \operatorname{arcctg}\frac{x-1}{x-2}$; ● г) $y = \operatorname{arcctg}(2x - x^2)$;

д) $y = \operatorname{arctg}\frac{x^2-4}{x^2-1}$; е) $|y| = \operatorname{arctg}\frac{x^2-4}{x^2-1}$.

22. а) $y = \arcsin(x-2)$; б) $y = \arccos\frac{x}{2}$;

в) $y = \arcsin x^2$; г) $y = -\arccos(-x^2)$.

23. а) $y = \operatorname{arctg}(x+1)$; б) $y = \operatorname{arcctg}(3-x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(x^2-1)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(4-x^2)$.

24. а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \cos(\arcsin x)$.

25. Пользуясь формулой для производной обратной функции, докажите, что:

▲ а) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$;

б) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$;

▲ в) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; г) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Найдите производную функции:

26. а) $y = \arcsin(1-x)$; б) $y = \arccos(x+2)$;

в) $y = \arcsin\frac{x}{2} + \arccos 2x$; г) $y = x \arcsin x$;

д) $y = \frac{\arccos x}{x}$; е) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$.

27. а) $y = \operatorname{arctg} x^2$; б) $y = \operatorname{arcctg} 2^x$;

в) $y = \arcsin(\sin x)$; г) $y = \arcsin \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

28. В указанной точке x_0 найдите значение производной функции: а) $y = 2 \arcsin x$; $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y = -3 \arccos x$, $x_0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y = \operatorname{arctg} x^3$, $x_0 = 1$; г) $y = 2 \operatorname{arcctg}(x^2 - 3)$, $x_0 = -1$.

29. В указанной точке $B(x_0;\ y_0)$ составьте уравнения касательной к кривой:

а) $y = \arcsin 3x$, $B\left(\dfrac{1}{5};\ \arcsin \dfrac{3}{5}\right)$; б) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$, $B\left(-2;\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

30. Найдите критические точки функции:

а) $y = x + \arccos x + 1$; ▲ б) $y = x \operatorname{arctg} x$.

31. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}$ на отрезке $[0; 1]$.

§ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение:

1. а) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$; б) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

в) $2 \sin x \cos x - 3 \sin 2x = 0$;

г) $\sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{\pi}{3} - \cos \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{4}$;

д) $\sin \sqrt{x} = -1$.

2. а) $\cos x = 0$; б) $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$;

в) $\sin^4 \dfrac{x}{2} - \cos^4 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$;

● г) $\cos \dfrac{\pi}{6} \cos x - \sin \dfrac{\pi}{6} \sin x = \dfrac{\pi}{4}$; д) $\cos x^2 = 1$.

3. ● $2 \cos\left[\dfrac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3}$.

4. ● Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $\cos x = \dfrac{a - 1{,}5}{2 - 0{,}5a}$ имеет решение.

5. Найдите критические точки функции: а) $y = 3 \sin x + 2(x - 1)$; б) $y = \cos 2x + ax - \sqrt{3}$.

Решите уравнение:

6. а) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = -1$;

● в) $\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 5$; ● г) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}$.

7. а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) = -1$; г) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$.

8. а) $\cos(1{,}5\pi + x) = \sqrt{2} \sin(x + \pi) \cos x$;

б) $2 \sin x \cos x + \sqrt{3} - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$;

в) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$; г) $\operatorname{tg}^3 3x - 2 \sin^3 3x = 0$;

д) $2 \operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2 \cos x + \operatorname{tg} x$.

9. а) $\sin x + \cos^2 x = \dfrac{1}{4}$; б) $3 \cos x = 2 \sin^2 x$;

в) $6 \cos^2 x + 13 \sin x = 12$;

г) $3 \cos^2 x - 4 \cos x - \sin^2 x - 2 = 0$;

д) $\cos^4 \dfrac{x}{5} + \sin^2 \dfrac{x}{5} = 1$;

е) $\sin x - \dfrac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1} \sin^2 x = \sin^2 x$.

10. а) $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$; б) $2 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x = 3$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4 \operatorname{tg} x$; г) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$.

11. а) $2 \cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) = 5$;

б) $\left(\cos \dfrac{\pi}{4} - \sin \dfrac{\pi}{6}\right)(\sec x + \operatorname{tg} x) = \sin \dfrac{\pi}{4} \cos x$;

▲ в) $\log_2(3 \sin x) - \log_2 \cos x - \log_2(1 - \operatorname{tg} x) - \log_2(1 + \operatorname{tg} x) = 1$.

12. а) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$;

г) $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{3}{\sin x \cos x} - 4 = 0$;

д) $\operatorname{tg} 5x + 2 \sin 10x = 5 \sin 5x$.

13. а) $\cos 2x - 3 \sin x + 2 = 0$;

б) $\cos (10x + 12) + 4\sqrt{2} \sin (5x + 6) = 4$;

● в) $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5$; г) $a \sin^2 x + \cos x = 0$.

14. Найдите критические точки функции:

▲ а) $f(x) = e^3 - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} - 4 \sin^2 \frac{x}{2}$;

б) $f(x) = \sin^2 3x + 3\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \cos 1$;

в) $f(x) = 2x - 0{,}25 \sin 4x + 0{,}5 \sin 2x$;

▲ г) $f(x) = \log_2 3 + x(1 - \sqrt{10}) + (\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \cos x)\sin x$;

д) $f(x) = (2\sqrt{2} - 1)(1 + \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) x$.

Решите уравнение:

15. ▲ а) $\cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$;

б) $4 \cos x (2 - 3 \sin^2 x) = -(1 + \cos 2x)$;

● в) $\operatorname{tg}^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3$;

г) $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

16. ▲ а) $\sin x = 5 \cos x$; б) $\sin x - \cos x = 0$;

в) $\sin x + \cos x = 0$; г) $|\sin x| = \sin x + 2 \cos x$;

д) $\cos^2 x - 4 \sin x \cos x = 0$.

17. а) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x$;

б) $\sin 2x - \sin^2 x = 2 \sin x - 4 \cos x$;

в) $\operatorname{tg} x + \sin (\pi + x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$;

г) $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x$;

● д) $3 (\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$.

18. ▲ а) $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

б) $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$;

в) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$;

● г) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2$;

д) $\frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$.

19. а) $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 0$;

▲ б) $\sin^2 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = 3\sin x\,(\cos x - \sin x) + 3$;

● в) $\sin^4 x + \sin^3 x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos^3 x + \cos^4 x = 1$;

г) $(8a^2 + 1)\sin^3 x - (4a^2 + 1)\sin x + 2a\cos^3 x = 0$.

20. Найдите критические точки функции:

а) $y = 3\cos 2x - 5\sin 2x + 4\cos 2$;

б) $y = 8\sin 2x + 6\cos^2 x + 17x + 1$;

в) $y = \cos^3 x - 3\cos x + \frac{3x}{8} - 3\sin 3$;

г) $y = 8\,(\cos 2 - \cos x) - \sin x - \frac{1}{\sin x}$;

д) $y = 9\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{tg} 2$.

Решите уравнение:

21. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

в) $\sin 5x = \sqrt{3}\,(1 + \cos 5x)$; г) $\cos x + \sin x = 1$;

д) $\sin x + \cos x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;

22. а) $\sin|x|\operatorname{tg} 5x = \cos x$; б) $\cos x - \sin x = a$;

в) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$;

г) $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x\operatorname{tg}^2 x = 1$.

23. а) $\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x} = -1$; б) $\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 2x} = 1$;

▲ в) $2\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg} 3x$;

г) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg}(x + 25^\circ) = \operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg}(x + 25^\circ)$.

24. ● а) $\sin x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$; ● б) $1 + \cos x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$;

в) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 4\sin 2x$;

г) $15 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 130 \sin x = \frac{53}{5} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

д) $\frac{59}{4} \cos x + 6 \sin x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

е) $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin^2 x \operatorname{tg} x$.

25. ▲ Равносильны ли уравнения

$$1 + \cos 2x + \sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0?$$

Решите уравнение:

26. ▲ а) $\cos 3x = -2 \cos x$; ● б) $\cos 9x - 2 \cos 6x = 2$;
● в) $\cos 4x = \cos^2 3x$.

27. ● а) $3 \sin \frac{x}{3} = \sin x$; б) $\sin 6x + 2 = 2 \cos 4x$;

в) $\sin \frac{3x}{2} + 3 \sin x = 3 \sin \frac{x}{2}$;

● г) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

28. $3 \cos x + 3 \sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$.

29. ▲ а) $\sin x + \sin \frac{3x}{2} = a \sin \frac{x}{2}$;

б) $a^2 \sin^2 3x = \sin^2 x$, $a > 0$.

30. ▲ $a \cos x + b \sin x = c$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

31. а) $2 \cos x + 3 \sin x = 2$; б) $\sin x + \cos x = a^2$;
▲ в) $\sin 2x + 3 \cos 2x = a$;
● г) $2 \cos^2 6x - 9 \sin^2 6x + 4 \sin 6x \cos 6x = a + 5$.

32. При каких значениях p уравнение $\sqrt{p} \cos x - 2 \sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2 - p}$ имеет решения?

33. Найдите критические точки функции

$$f(x) = \sin 3x + \frac{4}{3} \cos 3x - ax.$$

Решите уравнение:

34. а) $\sin x + \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; б) $\sin 4x - \sin 2x = 0$;

в) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$; г) $\cos 2x - \cos 6x = 0$;

● д) $\cos (3x - 4\pi) = \sin (\pi - x)$; е) $\sin \pi x^2 = \sin \pi (x^2 + 2x)$.

35. а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $1+\sin 2x=(\sin 3x-\cos 3x)^2$;
в) $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x)$;
г) $\cos x-\cos 3x=2\sqrt{3}\,\sin^2 x$;

36. а) $\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x=0$;
б) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$;
в) $\sin x+2\sin 2x=-\sin 3x$;
г) $\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$.

37. ● а) $\sqrt{2}\,\sin 10x+\sin 2x=\cos 2x$;
б) $\operatorname{ctg} x\sin 2x-\cos 2x=1$;
● в) $\operatorname{tg} 2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\,\sin 5x=0$;
● г) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right).$$

38. ● а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;
б) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$;
в) $\cos 5x-\sin 5x=\sin 7x-\cos 7x$;
г) $\sin 7x+\cos^2 2x=\sin^2 2x+\sin x$;
д) $\cos 2x-\sin 3x-\cos 8x=\sin 10x-\cos 5x$.

39. а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$;
б) $5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0$;
▲ в) $\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} 2x=\operatorname{cosec} 4x$;
г) $\sin a+\sin(x-a)+\sin(2x+a)=\sin(x+a)+\sin(2x-a)$.

40. Найдите критические точки функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 8.$$

Решите уравнение:

41. а) $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=0$; ▲ б) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=0$.

42. ▲ а) $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x$;
б) $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$;
в) $\cos 3x\sin 7x=\cos 2x\sin 8x$;
г) $\sin 5x\cos 3x=\sin 6x\cos 2x$;

д) $\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$.

43. ▲ а) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

в) $\sin 7x + \sin 9x = 2\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right]$;

г) $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{9}{16}$.

44. ● а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

● б) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -0{,}5$.

45. ▲ а) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$;

б) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

46. ▲ а) $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8}$;

б) $8\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$;

в) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

47. а) $\sin 3x = 4\sin x \cos 2x$; б) $\sin 3x \cos x = 1{,}5\operatorname{tg} x$;

● в) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x = 4$; г) $6\operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 2x$;

д) $\sin x \cos x \sin 3x - \cos 3x \sin^2 x = 6\operatorname{ctg} x$.

48. а) $2\sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3$;

б) $2\cos 4x + 5\cos 2x - 1 = 2\sin^2 x$;

● в) $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x$;

● г) $\operatorname{tg}^2 x + \cos 4x = 0$; д) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3$.

49. а) $\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$;

б) $\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x - 3\sin^4 x = 2\cos 2x - 2a\cos 4x$;

в) $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{a}{8}\cos 2x$.

50. ▲ а) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$;

● б) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$;

в) $1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}\sin x$;

г) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sin x \cos x)$;

● д) $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$;

е) $\sin \frac{\sqrt{x}}{2} + \cos \frac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{2} \sin \sqrt{x}$.

51. а) $a \sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}$;

б) $\sin 2x - 2\sqrt{2}b (\sin x - \cos x) + 1 - 4b = 0$;

в) $\sin^3 x + \cos^3 x + a \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

52. Найдите критические точки функции

$$f(x) = 8x - 8(\sin x - \cos x) - \cos 2x + 1.$$

Решите уравнение:

53. ▲ а) $\sin^2 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - \sin x + \frac{11}{12} = 0$;

б) $8 \cos x + 6 \sin x - \cos 2x - 7 = 0$;

● в) $\sin^4 x + \sin^4\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^4 x = 0{,}5 \sin^2 2x$.

54. ▲ а) $\left(\cos \frac{x}{4} - 2 \sin x\right) \sin x + \left(1 + \sin \frac{x}{4} - 2 \cos x\right) \cos x = 0$;

б) $3 \sin 3x = \cos 4x - \sin 9x - \cos 10x$.

55. ● а) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$;

● б) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x}$.

56. ▲ а) $\sqrt{2 \cos 2x + 2} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4 \cos 2x}}$;

б) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{a \cos x}$.

57. ▲ а) $\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{2} \cos x = 0$; б) $\sin x + \sqrt{\cos x} = 0$;

в) $2 \cos x = \sqrt{2 + 2 \sin 2x}$;

г) $\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 3x} = \sin 2x$;

д) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{0{,}5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$;

е) $\frac{1 - a \sin x}{1 + a \sin x} \sqrt{\frac{1 + 2a \sin x}{1 - 2a \sin x}} = 1$.

58. а) $\sqrt{1+4\sin x\cos x} = \cos x - \sin x$;

● б) $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$;

в) $\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} = \sin x + \cos x$;

г) $4\sin 3x + 3 = \sqrt{2\sin 3x + 2}$;

д) $\sqrt{13 - 18\operatorname{tg} x} = 6\operatorname{tg} x - 3$;

е) $\sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x} = 2\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

59. а) $2\sqrt{3\sin x} = \dfrac{3\operatorname{tg} x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\operatorname{ctg} 3x + \sin^2 x - \dfrac{1}{4}} = \sin\dfrac{3x}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

60. $\sqrt{\cos x - \dfrac{1}{2}} + \sqrt{\cos x + \dfrac{1}{3}} = a$, $a \in \boldsymbol{R}$.

61. ▲ а) $\log_5 \operatorname{tg} x = (\log_5 4)\log_4 (3\sin x)$;

б) $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\dfrac{\sin x}{5}}$.

62. ● а) $2^{\cos 2x} = 3\cdot 2^{\cos^2 x} - 4$; б) $\operatorname{ctg} 2^x = \operatorname{tg} 2^x + 2\operatorname{tg} 2^{x+1}$;

в) $x^{3\sin 2x + 2} = \sqrt{x}$.

63. ▲ а) $\sin 2x = \cos 3x$; б) $\sin 3x + \cos x = 0$;

в) $\cos 5x = \sin 3x$; г) $\cos 3x + \sin 4x = 0$.

64. ▲ а) $\cos 3x + \cos 5x = \cos 4x$; б) $\sin 3x + \sin 6x + \sin 9x = 0$;

в) $\sin x + \cos 9x = \sin 4x$; г) $\cos 4x - \sin 3x = \cos 2x$.

65. ▲ а) $\sin 2x + 3\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2$;

б) $6\sin 2x - 5\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 7$;

в) $\sin 2x + 3\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$;

г) $\sin 2x + 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 5 = 0$.

66. ▲ а) $2\left[\sqrt{2}\,\sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$;

б) $4\left[\sqrt{2}\,\sin x - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 + \sqrt{3} =$

$= 2\,(1 + \sqrt{3})\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\left[2\sin x - \sqrt{3}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]^2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2$;

г) $2\left[\sqrt{2}\,\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 + 1 = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

67. ▲ а) $2\cos 4x + 7\,(\cos x + \sin x)^2 + 2 = 0$;

б) $\cos 6x - 12\cos^3 x = 4 - 9\cos x$;

в) $3\cos 4x = 14\,(\sin x - \cos x)^2 - 3$;

г) $48\sin x - \cos 6x = 5 + 64\sin^3 x$.

68. ▲ а) $\cos x + \cos\frac{x}{3} = \cos\frac{2x}{3} + 1$; б) $\sin 2x - \sin\frac{2x}{3} = \cos\frac{4x}{3}$;

в) $\cos x - 1 = \cos 2x - \cos 3x$; г) $\sin\frac{x}{2} + 1 = \sin\frac{x}{6} + \cos\frac{x}{3}$.

69. а) $\sin x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$; б) $\sqrt{3}\,\sin 2x + \sin^2 x = \cos^2 x$;

в) $\sin^4 x + 1 = \cos^4 x$; г) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 2\cos 2x = 2$.

70. а) $|-\sin x| = 2\cos x$; б) $|\cos x| = -3\sin x$;

в) $\sin 3x = \mathrm{tg}\,|x|\cos 3x$.

Решите систему уравнений:

71. а) $\begin{cases} x - y = 6{,}5\pi, \\ 3\cos^2 x - 12\cos y = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

72. а) $\begin{cases} \sin 3x\cos 2y = 2^a - \cos 3x\sin 2y, \\ \cos\,(x - y) = 0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x\cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = 2, \\ \cos x\cos y = 0{,}5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,y. \end{cases}$

73. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - 2\sin y = -2; \\ 5\operatorname{tg} x + 2\sin y = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \cos y = \dfrac{a+3}{3}, \\ \sin x \cos y = -\dfrac{a}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} y = 2a + 2, \\ \operatorname{tg} y + (a^2 + 2a)\cos x = 0. \end{cases}$

74. а) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ ▲ б) $\begin{cases} \cos(x+y) = \dfrac{1}{2}, \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенство:

1. а) $\sin 2x > 0$; б) $\sin \dfrac{x}{2} < 0$; в) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$;

г) $\sin(2x - 1) > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\sin x \leqslant -1$.

2. а) $\cos \dfrac{x}{3} > 0$; б) $\cos 4x < 0$; в) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$;

г) $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right) < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\cos x \geqslant 1$.

3. а) $\operatorname{tg} 2x > 0$; б) $\operatorname{tg} \dfrac{x}{4} < 0$;

в) $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$; г) $\operatorname{tg}(3x - 2) < -\sqrt{3}$.

4. а) $\operatorname{ctg} x < 0$; б) $\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$; в) $\operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) < -2$.

5. а) $|\sin x| > \frac{1}{2}$; б) $|\cos x| < \frac{1}{2}$; в) $|\operatorname{tg} x| \leqslant 1$;

г) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$.

6. а) $\frac{1}{3} \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{4}$;

в) $-2 < \operatorname{tg} x < 3$; г) $-4 < \operatorname{ctg} x \leqslant 1{,}5$.

7. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 > 0$.

8. $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geqslant 0$.

9. $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$.

10. $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geqslant 0$.

11. $2(\sqrt{2} - 1)\sin x - 2\cos 2x + 2 - \sqrt{2} < 0$.

12. ● $\cos \pi x + \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

13. ● $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{8}$.

14. ● $\cos x \cos 2x \cos 3x \leqslant 0$. **15.** $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$.

16. ● $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$. **17.** ● $8\sin^6 x - \cos^6 x > 0$.

18. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$. **19.** ● $3\sin 2x - 1 > \sin x + \cos x$.

20. $\sin 2x > \sqrt{2}\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos^2 x$, $0 < x < 2\pi$.

21. $|\sin x| > \cos^2 x$. **22.** $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$.

23. $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$.

24. $9^{1 + \sin^2 \pi x} + 30 \cdot 9^{\cos^2 \pi x} \leqslant 117$.

Найдите область определения функции:

25. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$. **26.** $y = \sqrt{\cos x^2}$.

27. $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x}$. **28.** $y = \arccos(2\sin x)$.

29. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos 2^x$.

30. Докажите, что функция $y = \sin^2 x$ монотонно возрастает на интервале $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

31. Докажите, что функция $y = \cos^3 x$ монотонно убывает на интервале $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

32. ● Докажите, что если $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$.

Найдите критические точки функции:

33. $f(x) = 2 \sin a \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{4a - a^2}}$.

34. $f(x) = \left(1 - \frac{\cos a}{4}\right) \sin 2x + \frac{1}{8} \sin (\pi + 4x) +$

$$+ x\left(\frac{\cos a - 3}{2}\right) + \sqrt{2a - a^2 + 3}.$$

35. $f(x) = \frac{1}{3} \sin a \operatorname{tg}^3 x + (\sin a - 1) \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{a - 2}}{\sqrt{8 - a}}$.

Глава IV

Задачи на составление уравнений и неравенств

§ 1. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. Поезд вышел со станции A по направлению к станции B. Пройдя 450 км, что составляло 75% всего пути AB, он остановился из-за снежного заноса. Через полчаса путь был расчищен, и машинист, увеличив скорость поезда на 15 км/ч, привел его на станцию B без опоздания. Найдите первоначальную скорость поезда.

2. Моторная лодка прошла вниз по течению реки 14 км, а затем 9 км против течения, затратив на весь рейс 5 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость моторной лодки в стоячей воде равна 5 км/ч.

3. По графику поезд должен проходить перегон от A до B длиной в 20 км с постоянной скоростью. С заданной скоростью поезд прошел полпути и остановился на 3 мин; чтобы вовремя прийти в пункт B, ему пришлось остальные полпути идти на 10 км/ч быстрее. Второй раз поезд простоял на полпути 5 мин. С какой скоростью он должен был идти оставшуюся часть пути, чтобы прибыть в пункт B по расписанию?

4. Велосипедист выехал из пункта A в B и ехал с постоянной скоростью 20 км/ч. Когда он проехал $8\frac{1}{3}$ км, его догнал автомобиль, вышедший из пункта A на 15 мин позже и шедший также с постоянной скоростью. После того как велосипедист проехал еще 25 км, он встретил автомобиль, уже возвращавшийся из B, где он простоял полчаса. Найдите расстояние между A и B.

5. Лодка спускается вниз по течению реки из пункта A в пункт B, находящийся в 10 км от A, а затем возвращается в A. Если собственная скорость лодки равна 3 км/ч, то путь из A в B занимает на 2 ч 30 мин меньше, чем из B в A. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы поездка из A в B заняла 2 ч?

6. Расстояние от A до B составляет 30 км. Из A выехал автобус с постоянной скоростью. Через 10 мин из A вылетел вертолет, который летел вдоль шоссе к B. Через 5 мин после вылета он нагнал автобус и продолжал лететь до B. Не приземляясь в B, вертолет повернул назад и снова встретил автобус через 20 мин после своего вылета из A. Определите скорости автобуса и вертолета.

7. Из города M в город N в 5 ч утра вышел товарный поезд. Через 1,5 ч вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 5 км/ч больше скорости товарного. В 21 ч 30 мин того же дня расстояние между поездами составляло 21 км. Найдите скорость товарного поезда.

8. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от A до B пароход проходит в 1,5 раза быстрее катера, при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 км. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в 2 раза быстрее катера. Найдите скорости парохода и катера в стоячей воде.

9. Пункт C расположен в 12 км от B вниз по течению реки. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше пункта B. Через 4 ч он прибыл в C, а на обратный путь затратил 6 ч. Поставив на лодку мотор и тем самым увеличив скорость лодки относительно воды втрое, рыбак добрался от A до B за 45 мин. Определите скорость течения реки, считая, ее постоянной.

10. ▲ Два пешехода вышли одновременно: один из пункта A в пункт B, другой из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, сразу же отправлялся обратно. Первый раз они встретились в 12 км от B, второй раз — через 6 ч после первой встречи в 6 км от A. Найдите расстояние между пунктами A и B и скорости пешеходов.

11. Два самолета вылетают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии a км от середины AB. Если бы первый самолет вылетел на b ч позже второго, то они встретились бы на середине AB. Если же второй самолет вылетел на b ч позже первого, то они встретились бы на $\frac{1}{4}$ пути от B. Найдите расстояние AB и скорости самолетов.

12. Два туриста вышли одновременно из пункта A в B, причем первый турист каждый километр пути проходил на 5 мин быстрее второго. Первый, пройдя $\frac{1}{5}$ часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 мин, снова направился в B. При этом в B оба туриста пришли одновременно. Каково расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 ч?

13. Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, а второй — 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а еще через 1 ч 30 мин догнал и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

14. Меньшая дуга AB окружности имеет длину l см. Движущиеся по окружности точки P_1 и P_2 в момент $t = 0$ находятся соответственно в точках A и B. Если точки P_1 и P_2 будут двигаться навстречу друг другу по меньшей дуге, то они встретятся через t_1 с, а если по большей, то — через t_2 с. Точка P_1 обегает всю окружность за то время, в течение которого P_2 проходит s см. Найдите длину окружности и скорости точек P_1 и P_2 (движение точек по окружности равномерное).

15. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, встречаются через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то они встречались бы через каждые 8 мин. Пусть при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 м; тогда через 24 с оно составит 26 м (в течение этих 24 с тела не встретились). Найдите скорости тел и длину окружности.

16. Расстояние между пунктами A и B, расположенными на прямолинейном шоссе, равно 15 км. Из пункта A выезжает велосипедист с постоянной скоростью 8 км/ч, а из B в том же направлении — мотоциклист, который движется с постоянным ускорением 2 км/ч^2. Через какое время после начала движения расстояние между велосипедистом и мотоциклистом будет равно 750 м, если они начнут движение одновременно? Начальная скорость мотоциклиста равна нулю.

17. Студенты взяли на лодочной станции лодку напрокат. Сначала они спустились вниз по течению реки на 20 км, затем повернули обратно и вернулись на лодочную станцию, затратив на всю прогулку 7 ч. На обратном пути на расстоянии 12 км от лодочной станции они встретили плот, проплывавший мимо нее в тот момент, когда они направились на прогулку. С какой скоростью двигалась лодка вниз по течению реки и какова скорость течения реки?

18. Из порта одновременно вышли два парохода: один — на север, другой — на восток. Через 2 ч расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

19. Пункты A, B, C удалены от пункта M соответственно на 60, 55 и 56 км. Одновременно из этих пунктов в пункт M вышли три пешехода: первый — из A, второй — из B, третий — из C. Первый прошел весь путь с постоянной скоростью и прибыл в M на 2 ч раньше второго и третьего, прибывших одновременно. Второй пешеход, пройдя 40 км с той же скоростью, что и первый, сделал остановку на 1 ч. Остаток пути он прошел со скоростью, которая меньше скорости третьего пешехода на столько же, на сколько скорость третьего меньше скорости первого. Третий пешеход весь путь прошел с постоянной скоростью. Определите скорости первого и третьего пешеходов.

20. Дорога проходит через пункты A и B. Одновременно и в одном направлении выехали: из A — мотоциклист (в направлении к B), из B — велосипедист. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии a км от B. Если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из A в B, то в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист отставал бы от него на b км. Определите расстояние между пунктами A и B (скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны).

21. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два пешехода. Когда пешеход, вышедший из A, прошел $\frac{2}{3}$ пути, второй пешеход находился в 2 км от середины пути. Найдите расстояние между A и B, если известно, что, когда пешеход, вышедший из B, прошел $\frac{3}{16}$ пути, первый пешеход находился от середины пути в 3 км. Скорости пешеходов постоянны.

22. Два пешехода вышли одновременно из пункта A. Первый из них встретился с туристом, идущим в A, через 20 мин после выхода из A, а второй встретил туриста на 5 мин позже первого. Через 10 мин после второй встречи турист пришел в A. Скорости пешеходов и туриста постоянны. Найдите отношение скоростей пешеходов.

23. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через 2 ч из A в B выехал автомобиль, который прибыл в B одновременно с мотоциклистом. Если бы автомобиль и мотоциклист одновременно выехали из A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 20 мин после выезда. Сколько часов провел в пути из A в B мотоциклист?

24. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, второй — в противоположном направлении. Велосипедист проехал от A до B за 0,5 ч и, продолжая движение, догнал второго пешехода. Это произошло через 1,2 ч после встречи велосипедиста с первым пешеходом. Определите время движения велосипедиста от начала движения до встречи с первым пешеходом (скорости велосипедиста и пешеходов постоянны).

25. ▲ Города A и B стоят на берегу реки. Буксир тратит на прохождение от A до B и обратно 13 ч, а катер, собственная скорость которого в 2 раза больше собственной скорости буксира, тратит на этот же путь 6 ч. Во сколько раз собственная скорость буксира больше скорости реки?

26. Из пункта A отправилась моторная лодка вверх по Волге, а из пункта B одновременно вышел плот по течению. Через a ч они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до B, лодка, не задерживаясь, повернула обратно и догнала плот в пункте A. Предполагается, что собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько часов находились в пути плот и лодка?

27. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. За какое время пройдет все расстояние каждый из них, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

28. Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 1,6 ч расстояние между ними составило 0,2 первоначального. Сколько часов требуется каждому из велосипедистов на прохождение пути AB, если первый затрачивает на этот путь на 3 ч меньше второго?

29. Три лыжника проходят дистанцию, двигаясь равномерно. Через m мин после старта третьего лыжника ему остается пройти часть дистанции, которую первый лыжник может пройти за n мин, второй — за p мин. За сколько минут может пройти всю дистанцию каждый из лыжников, если скорость третьего лыжника равна полусумме скоростей первого и второго?

30. ▲ Два автомобиля выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 16 ч после встречи автомобиль, ехавший из A, прибыл в B, а через 25 ч после встречи автомобиль, ехавший из B, прибыл в A. Сколько часов был в пути каждый автомобиль?

31. Из пункта A в B одновременно отправляются пешеход и велосипедист. Доехав до B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 1 ч после начала движения. После встречи пешеход продолжает идти в B, а велосипедист поворачивает и также едет в B. Доехав до B, велосипедист снова поворачивает обратно и встречает пешехода через 40 мин после первой встречи. Определите, за какое время пешеход пройдет расстояние от A до B.

32. ▲ Из пунктов A и B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдет на 56 мин раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 мин раньше. Определите время встречи в том случае, когда скорости обоих автомобилей были бы удвоены.

§ 2. ЗАДАЧИ НА РАБОТУ, ПРОЦЕНТЫ, СМЕСИ, ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1. Три землекопа, работая одновременно, за четыре дня выкопали 216 м^3 траншеи. За один день третий землекоп выкапывает больше второго на столько же кубометров, на сколько второй выкапывает за день больше первого. За 5 дней третий землекоп выкапывает столько же кубометров, сколько первый за 7 дней. Сколько кубометров в день выкапывает первый землекоп?

2. На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в строй третий участок, в результате чего производительность шахты увеличилась в 1,5 раза. Сколько процентов составляет производительность второго участка от производительности первого, если известно, что за 4 месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за год?

3. Трое рабочих выполнили задание за 10 дней, причем третий из них работал только первые три дня. За сколько дней выполнил бы задание каждый рабочий, если известно, что за первые три дня они вместе выполнили 37% всего задания, а за 5 дней первый рабочий сделал столько же, сколько второй за 4 дня?

4. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили задание за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то задание заняло бы у них 4 дня. За какое время выполнил бы все задание один первый рабочий?

5. Два скрепера разной мощности, работая вместе, могут выполнить задание за 6 ч. Если бы первый проработал 4 ч, а затем один второй 6 ч, то они выполнили бы 80% всего задания. За сколько часов каждый скрепер, работая отдельно, может выполнить все задание?

6. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что вместе они делают за час 20 деталей. К заданию приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более 3 ч. Оставшуюся часть задания выполнили вместе второй и третий рабочие. На все задание ушло 8 ч. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на все задание, если бы с начала и до конца он делал ее один?

7. Три обыкновенных и два тракторных плуга обрабатывают вместе поле за 6 дней. Три тракторных плуга выполнили бы ту же работу на 5 дней быстрее, чем девять обыкновенных. Во сколько раз производительность тракторного плуга больше производительности обыкновенного?

8. Каждому из трех рабочих для выполнения некоторого задания требуется определенное время, причем третий рабочий выполняет его на 1 ч быстрее первого. Работая все вместе, они выполняют задание за 1 ч. Если же первый рабочий проработает 1 ч, то второму для завершения всего задания потребуется 4 ч. За какое время может выполнить все задание каждый рабочий?

9. Два экскаватора выполняют некоторую работу. Если эту работу будет выполнять только первый экскаватор, то он может закончить ее на 8 ч позднее, чем оба вместе. Если же эту работу будет выполнять только второй экскаватор, то он закончит ее на 4,5 ч позже, чем оба вместе. За какое время может выполнить работу каждый из экскаваторов в отдельности?

10. За t мин один автомат изготавливает на d деталей больше другого. Если бы на каждом из них удалось сократить время выпуска одной детали на 2 мин, то первый автомат выпускал бы за t мин на $2d$ деталей больше второго. Сколько деталей изготавливает каждый автомат за t мин?

11. Два куска одинаковой ткани стоят вместе 4550 р. Когда из первого куска продали столько, сколько было первоначально во втором, а из второго — половину того, что было первоначально в первом, остаток первого куска оказался на 10 м больше остатка второго куска. Сколько метров ткани было в каждом куске, если 1 м ткани стоит 70 р.?

12. В ателье поступило по одному куску черной, зеленой и синей ткани. Хотя зеленой ткани было на 9 м меньше, чем черной, и на 6 м больше, чем синей, стоимость кусков была одинаковой. Известно также, что стоимость 4,5 м черной ткани равна общей стоимости 3 м зеленой и 0,5 м синей ткани. Сколько метров было в каждом куске?

13. Бак вместимостью 2400 $м^3$ наполняется топливом. При опорожнении этого же бака производительность насоса на 10 $м^3$/мин выше, чем производительность насоса при наполнении. В результате время опорожнения бака на 8 мин меньше времени заполнения. Определите производительность насоса при наполнении бака.

14. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт $\frac{1}{3}$ того времени, за которое наполняет бассейн один второй кран. Затем, наоборот, один второй кран был открыт $\frac{1}{2}$ того времени, за которое наполняет бассейн один первый кран. После этого оказалось наполненным $\frac{5}{6}$ бассейна. Оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 2,4 ч. За какое время наполнит бассейн каждый кран в отдельности?

15. ▲ Бак объемом 425 $м^3$ наполнился водой из двух кранов, причем первый кран был открыт на 5 ч дольше второго. Если бы первый кран был открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй был открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекло бы воды вдвое меньше, чем из второго; если же открыть оба крана одновременно, то бак наполнится через 17 ч. Сколько часов был открыт второй кран?

16. Двум токарям и ученику поручили выполнение срочной работы. Первый токарь может один выполнить всю работу за время на 3 ч большее, чем время, за которое второй токарь и ученик, работая одновременно, выполняют ту же работу. Второй токарь, работая один, выполняет всю работу за то же время, за которое ее выполняют первый токарь и ученик, работая одновременно. Время, затрачиваемое вторым токарем на самостоятельное выполнение всей работы, на 8 ч меньше удвоенного времени, затрачиваемого первым токарем на самостоятельное выполнение всей работы. За какое время будет выполнена вся работа двумя токарями и учеником, работающими одновременно?

17. Трое рабочих разной квалификации выполнили некоторое задание, причем первый работал 6 ч, второй — 4 ч и третий — 7 ч. Если бы первый рабочий работал 4 ч, второй — 2 ч и третий — 5 ч, то было бы выполнено лишь $\frac{2}{3}$ всего задания. За сколько часов рабочие закончили бы задание, если бы они работали все вместе одно и то же время?

18. В бассейн проведены четыре трубы. Когда открыты первая, вторая и третья трубы, бассейн наполняется за 12 мин; когда открыты вторая, третья и четвертая трубы, — за 15 мин; когда открыты только первая и четвертая трубы, — за 20 мин. За какое время наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы?

19. Одна железная руда содержит 72% железа, другая — 58%. Некоторое количество первой руды смешивают с некоторым количеством второй и получают руду, содержащую 62% железа. Если бы для смеси взяли каждой руды на 15 кг больше, чем было взято, то получилась бы руда, содержащая $p\%$ железа. Сколько килограммов первой и второй руды было взято для составления первой смеси?

20. В первый сосуд вместимостью 6 л налито 4 л 70%-ного раствора серной кислоты; во второй сосуд такой же вместимости налито 3 л 90%-ного раствора серной кислоты (имеется в виду объемное процентное содержание). Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился $q\%$-ный раствор серной кислоты?

21. После двух последовательных повышений зарплата достигла $\frac{15}{8}$ по сравнению с первоначальной. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было вдвое больше (в процентном отношении) первого?

22. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{3}{5}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а остальную часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 ден. ед., к концу следующего года — 701 ден. ед. Было подсчитано, что если бы первоначально $\frac{3}{5}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 610 ден. ед. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

23. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 1 л глицерина, а взамен долили 1 л воды. После перемешивания снова отлили 1 л смеси и долили 1 л воды. Наконец, опять после перемешивания отлили 1 л смеси и долили 1 л воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в 7 раз большим по объему оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

24. Из колбы, содержащей раствор соли, отлили в пробирку 0,1 раствора. Затем из пробирки часть воды нагреванием испарили, в результате чего процентное содержание соли в пробирке увеличилось в k раз. Какое было первоначальное процентное содержание соли в колбе, если известно, что после переливания в нее содержимого пробирки процентное содержание соли в колбе увеличилось на $a\%$?

25. Имеются три куска сплава меди с оловом. Массы этих кусков относятся как 3 : 4 : 5. Процентное содержание меди во втором куске в a раз больше, а в первом куске в a раз меньше, чем в третьем куске. После того как все три сплава сплавили вместе, получили новый сплав меди и олова, в котором процентное содержание меди изменилось на $p\%$ по сравнению с процентным содержанием меди в третьем куске. Каково было первоначальное процентное содержание меди в этих сплавах?

26. Разность цифр двузначного числа равна 2, а сумма квадратов тех же цифр равна 52. Найдите это число.

27. Если двузначное число разделить па произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке — 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

28. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 17, а сумма квадратов его цпфр равна 109. Если же из этого числа вычесть 495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

29. Сумма кубов цифр двузначного числа равна 243, а произведение суммы его цифр на произведение его цифр равно 162. Найдите это двузначное число.

30. ▲ Задано четырехзначное число. Если к нему прибавить цифру его тысяч, то трехзначное число, образованное тремя последними цифрами полученного числа, окажется вдвое меньше исходного. Найдите исходное четырехзначное число.

31. Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырехзначное число, которое нацело делится на их произведение. Найдите эти числа, если одно из них в 2 раза больше другого.

32. Задано трехзначное число, кратное 9. Если отбросить цифру его сотен и к полученному двузначному числу прибавить 2, то результат окажется втрое меньше исходного числа. Найдите исходное число.

33. Задано некоторое двузначное число, кратное 3. Если между его цифрами вставить нуль и к полученному трехзначному числу прибавить удвоенную цифру его сотен, то получится число, которое в 9 раз больше, чем заданное двузначное число. Найдите исходное число.

34. Найдите двузначное число, которое на 12 больше суммы квадратов его цифр и на 16 больше удвоенного произведения его цифр.

35. Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если же число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найдите исходное число.

§ 3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

1. В четырехзначном числе сумма цифр сотен, десятков и единиц равна 14, сумма цифр тысяч и единиц равна 9, цифра сотен больше цифры десятков на 4. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма произведения цифры тысяч на цифру единиц и произведения цифры десятков на цифру сотен принимает наибольшее значение.

2. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. В каких пределах должна находиться собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 ч?

3. Купили несколько одинаковых книг и альбомов. За книги заплатили 1056 р., за альбомы — 56 р. Книг купили на 6 больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 100 р. превосходит цену одного альбома?

4. Из точки A по прямой начали двигаться одновременно в одном направлении два тела: первое — равномерно ускоренно с начальной скоростью 3 м/с и ускорением 2 м/с^2, второе — равномерно. В каких пределах может изменяться скорость второго тела, чтобы оно сначала обогнало первое тело, но чтобы затем первое тело догнало второе на расстоянии, не большем 10 м от A?

5. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

6. ▲ Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 1700 до 1950 р. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 10 р. больше. Сколько стоил магнитофон?

7. Несколько человек должны были принять участие в экскурсии. Однако в последний момент два человека от участия в ней отказались, поэтому каждому из оставшихся экскурсантов пришлось уплатить за участие в экскурсии на 3 р. больше, чем планировалось первоначально (все участники должны были заплатить поровну). Сколько должен был заплатить каждый экскурсант первоначально, если стоимость экскурсии больше 70 р., но не более 75 р.?

8. Для перевозки груза из одного места в другое затребовали некоторое количество одинаковых машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие же машины. Масса перевезенного груза была больше 55 т, но не превосходила 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

9. ▲ Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 ч. Катер весь путь от A до B и обратно проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость (скорость в стоячей воде) катера увеличилась на 40%, то путь от A до B и обратно занял бы у катера не более 7 ч. Найдите время, за которое катер проходит путь из B в A, когда его собственная скорость не увеличена.

10. ▲ Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4», «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определите, сколько каких оценок получила группа.

11. ▲ Около дома посажены липы и березы, причем общее их количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез — на 18, то берез станет больше. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез было посажено?

12. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 и 50 км/ч. Улицы пересекаются под углом в 60°. В начальный момент времени машины находятся на расстояниях 5 и 4 км от перекрестка (соответственно). Через какое время расстояние между ними станет наименьшим?

13. ▲ В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м^3 воды в час. Вторая труба наливает в час на $3v$ м^3 меньше, чем первая ($0 < v < 10$), а третья труба наливает в час на $10v$ м^3 больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наполняют 0,3 бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, — оставшиеся 0,7 бассейна. При каком значении v бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

14. ● Из пункта A на прогулку вышел пешеход со скоростью v км/ч. После того как пешеход отошел от A на 6 км, из A следом за ним выехал велосипедист, скорость которого была на 9 км/ч больше скорости пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и вместе возвратились в A со скоростью 4 км/ч. При каком значении v время прогулки пешехода будет наименьшим?

15. Сосуд вместимостью 5 л содержит 2 л $p\%$-ного (по объему) раствора соли. Сколько литров 20%-ного раствора такой же соли надо налить в сосуд, чтобы процентное содержание соли в сосуде стало наибольшим?

16. ▲ Имеется три сплава. Первый содержит 45% олова и 55% свинца, второй — 10% висмута, 40% олова и 50% свинца, третий — 30% висмута и 70% свинца. Из них необходимо составить новый сплав, содержащий 15% висмута. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание свинца может быть в этом новом сплаве?

17. ● Тело начинает двигаться прямолинейно в момент времени $t = 0$ с начальной скоростью, равной 3 м/с. Через 1 с после начала движения скорость тела была равна 4 м/с. Найдите ускорение тела в конце первой секунды его движения и путь, пройденный телом за первые 4 с движения, если скорость тела изменяется по закону $v(t) = at^2 + 2t + b$.

18. Известно, что в классе не менее 31% девочек и более 65% мальчиков. Определите наименьшее возможное количество учеников в этом классе, если известно, что в нем не менее 8 девочек.

19. В автопробеге участвуют машины марок «Жигули» и «Волга». Известно, что «Жигулей» более 67%, а «Волг» не менее 25% от общего числа автомобилей. Определите наименьшее возможное количество участвующих в этом пробеге автомашин, если известно, что стартовали более трех «Жигулей».

20. Шахматный турнир собрал мастеров спорта и перворазрядников, причем количество мастеров более чем на 33% превосходит число перворазрядников, которых в свою очередь более 41% от общего числа участников турнира. Определите наименьшее возможное количество участников этого турнира, если известно, что в нем играют более трех мастеров.

Глава V

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие неопределенного интеграла. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(a; b)$ и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла

а) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx;$

б) $\int d\,\Phi(x) = \Phi(x) + C;$

в) $\int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \quad (A = \text{const};\ A \neq 0);$

г) $\int [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx.$

Таблица простейших интегралов

I. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0).$

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C.$

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$

VII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; $\int e^x\,dx = e^x + C.$

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

Основные методы интегрирования

Метод введения нового аргумента. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в области определения, то ее дифференциал $du = \varphi'(x)\,dx$. Эта формула часто применяется при интегрировании. Под знаком интеграла $\varphi'(x)\,dx$ заменяется на $d\varphi(x) = du$.

Примеры.

1. $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{de^x}{1 + (e^x)^2} = [e^x = u] = \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arctg} u + C =$
$= \operatorname{arctg} e^x + C.$

2. $\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2) = [x^2 = u] = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}\,e^u + C =$
$= \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C.$

3. $\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = [x^2 + 1 = u] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$
$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$

4. $\int \sin^2 x \cos x\,dx = \int \sin^2 x\,d(\sin x) = [\sin x = u] = \int u^2\,du =$
$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

$$5.\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x^2) =$$

$$= [1 - x^2 = u] = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = -\frac{1}{2}\, u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} + C = -u^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C.$$

$$6.\ \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \cos^{-2} x\, d(\cos x) = [\cos x = u] = -\int u^{-2}\, du =$$

$$= \frac{-u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$7.\ \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} =$$

$$= \left[\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = u\right] = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

Метод разложения. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Метод подстановки. Если функция $f(x)$ непрерывна, то, полагая $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получаем

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

П р и м е р ы.

$$1.\ \int \sqrt{1-x^2}\,dx = [x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt] = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{4}\int \cos 2t\,d(2t) =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x +$$

$$+ x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

2. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = [x = \sin\ t,\ dx = \cos\ t\ dt] = \int \frac{\sin^3 t \cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$

$= \int \frac{\sin^3 t \cos t\, dt}{\cos t} = \int \sin^3 t\, dt = \int (1 - \cos^2 t) \sin t\, dt =$

$= -\int (1 - \cos^2 t)\, d(\cos t) = -\int d(\cos t) + \int \cos^2 t\, d(\cos t) =$

$= -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = [x = t^3,\ dx = 3t^2\, dt] = 3 \int \frac{t^2dt}{t+1} =$

$= 3 \int \frac{(t^2+t)-(t+1)+1}{t+1}\, dt = 3 \left(\int t\, dt - \int dt + \int \frac{d(t+1)}{t+1}\right) =$

$= 3 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln |t + 1|\right) + C = 3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1|\right) + C.$

Метод интегрирования по частям. Если u и v — дифференцируемые функции от x, то $d(uv) = u\, dv + v\, du$, откуда

$$\int d(uv) = \int u\, dv + \int v\, du \Leftrightarrow uv = \int u\, dv + \int v\, du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

П р и м е р ы.

1. $\int \ln x\, dx = \left[u = \ln x,\ dv = dx,\ v = x,\ du = \frac{dx}{x}\right] =$

$= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$

2. $\int xe^x\, dx = \int x\, d(e^x) = [u = x,\ dv = e^x\, dx,\ v = e^x,\ du = dx] =$

$= xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C.$

3. $\int \arcsin x\, dx = \left[u = \arcsin x,\ dv = dx,\ v = x,\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$

$= x \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1 - x^2) =$

$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

Найдите первообразные данной функции:

1. а) $y = 2$; б) $y = -3x + 1$; в) $y = 4(2x - 1)$.

2. а) $y = -x^2$; б) $y = x^2 - 4x - \sqrt{3}$; в) $y = 18(3x + 2)^2$.

3. а) $y = x - 3x^3$; б) $y = \frac{1}{2}x + x^5$; в) $y = x^2 - x^4$;

г) $y = (3x - 4)^{100}$; д) $y = (1 - 5x)^7$.

4. а) $y = \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{1}{x^3} - x$; в) $y = 4x + \frac{1}{(2x+1)^2}$;

г) $y = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3}$.

5. а) $y = \frac{1}{4\sqrt{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 1$; в) $y = \sqrt[4]{x^3} + x$;

г) $y = \sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x} + \sqrt[6]{x}$; д) $y = \sqrt{x+2}$; е) $y = \sqrt{5-4x}$.

6. а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{1}{2x}$; в) $y = \frac{1}{1-x}$ г) $y = \frac{3}{4x-1}$.

7. а) $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$; ● б) $y = \frac{1}{x(x+1)}$;

в) $y = \frac{1}{x^2+5x+4}$; ● г) $y = \frac{2x+3}{x^2+3x}$.

8. а) $y = \frac{1}{1+x^2}$; ● б) $y = \frac{2}{x^2+4}$;

● в) $y = \frac{4x^2+1}{x^2(1+x^2)}$; ● г) $y = \frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)}$.

9. а) $y = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = -\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$;

● в) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{1-x^2}$.

10. а) $y = 2^x$; б) $y = 3^{-x}$; в) $y = 2e^{4x} + x$; г) $y = e^{-x}$;

д) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; е) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

11. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 3\sin\frac{x}{2}$; в) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

г) $y = -5\sin\left(10x + \frac{\pi}{8}\right)$.

12. а) $y = 4\cos(-x)$; б) $y = -2\cos\frac{x}{5}$;

в) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 2\cos(7x - 1)$.

13. ● а) $y = \sin^2 x$; б) $y = -2\cos^2 2x$;

● в) $y = 2\cos x \cos 5x$; г) $y = 2\sin 4x \sin 7x$;

д) $y = 2\sin 8x \cos 3x$; е) $y = 2\sin x \cos 11x$.

14. а) $y = \dfrac{3}{\cos^2 4x}$; б) $y = \dfrac{2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$;

● в) $y = \operatorname{tg}^2 x$; г) $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

15. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$, если:

▲ а) $f(x) = 3x^2 - 2$, $M(2;\ 4)$; б) $f(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$, $M(0;\ 1)$;

в) $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$, $M\left(\dfrac{\pi}{2};\ 1\right)$; г) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $M(0;\ 3)$.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$, то справедлива *формула Ньютона—Лейбница:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

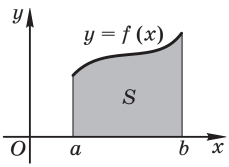


Рис. 2

В том случае, когда $f(x) \geqslant 0$, определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ геометрически представляет собой площадь S, ограниченную кривой $y = f(x)$, осью Ox и отрезками двух перпендикуляров к оси Ox: $x = a$ и $x = b$ (рис. 2). В более общем случае определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называют число, равное площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры, заключенной между прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$, причем площадь той части, которая лежит выше оси абсцисс, берется со знаком «+», а ниже ее — со знаком «−». Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то для любого $x \in [a;\ b]$ она интегрируема на отрезке $[a;\ x]$, т. е. существует функция $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$, которую называют *интегралом с переменным верхним пределом*. Функция $F(x)$ имеет производную по x (т. е. интеграл имеет производную по переменному верхнему пределу), при этом $(F(x))' = f(x)$, т. е. $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

1. Найдите производную функции:

а) $F(x) = \int \arcsin^2 x\,dx$; б) $F(x) = \int\limits_1^x \left(\sin^8 t + \sqrt{t^4+1}\right) dt$.

2. Найдите критические точки функции:

● а) $f(x) = \int\limits_1^x [t(t+1)(t+2)(t+3) - 24]\,dt$;

б) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x}{2} + \int\limits_1^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t - t^{\frac{1}{2}}\right) dt$;

в) $f(x) = \int\limits_2^x (\sin^2 t + \sin^2 2t + \sin^2 3t - 1{,}5)\,dt$;

г) $f(x) = \int\limits_0^x (\sin^2 2t - 2\cos^2 2t + a)\,dt$;

д) $f(x) = \int\limits_0^x (\sin 3t - 3\sin t + 0{,}5)\,dt$.

3. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} x(x^2-1)^5\,dx$;

в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2x\,dx}{x^2-1}$; г) $\int\limits_{-2}^{0} (\arcsin(x+1) + \arccos(x+1))\,dx$;

д) $\int\limits_{-1}^{3} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arcctg}\frac{x}{x^2+1}\right) dx$.

4. Найдите множество положительных значений a, удовлетворяющих уравнению $\int\limits_0^a (3x^2 + 4x - 5)\,dx = a^3 - 2$.

5. Найдите все значения a, при которых выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_1^a \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx < 4$.

6. Найдите все значения α, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$ и удовлетворяющие уравнению $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin x\, dx = \sin 2\alpha$.

7. Решите уравнение

$$\int\limits_{-1}^{x} (8t^2 + \frac{28}{3}t + 4)\, dt = \frac{1,5x + 1}{\log_{x+1}\sqrt{x+1}}.$$

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Если на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, при этом $f(x) > \varphi(x)$ при всех $x \in (a, b)$, то площадь S фигуры, ограниченной этими линиями и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, соединяющими эти линии, находят по формуле

$$S = \int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx \text{ (рис. 3, } a\text{).}$$

По этой же формуле находят площадь, если $f(a) = \varphi(a)$ (рис. 3, *б*) или $f(b) = \varphi(b)$ или $f(a) = \varphi(a)$, $f(b) = \varphi(b)$ (рис. 3, *в*).

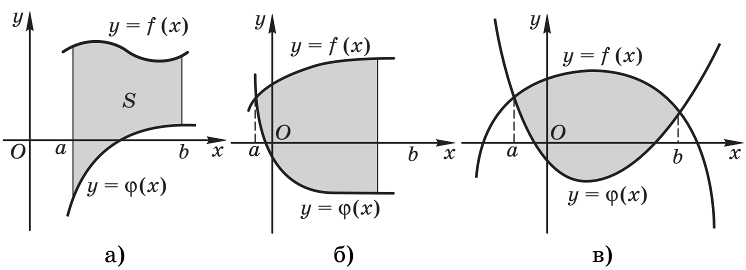


Рис. 3

Если на $[a; b]$ функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны, $f(x) > \varphi(x)$, точка $c \in (a; b)$, при этом

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), \text{ если } x \in [a; c], \\ \varphi_2(x), \text{ если } x \in [c; b], \ \varphi_1(c) = \varphi_2(c), \end{cases}$$

то площадь S фигуры, ограниченной этими кривыми и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 4), соединяющими кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, определяют по формуле

$$S = \int_a^c [f(x) - \varphi_1(x)]\, dx + \int_c^b [f(x) - \varphi_2(x)]\, dx.$$

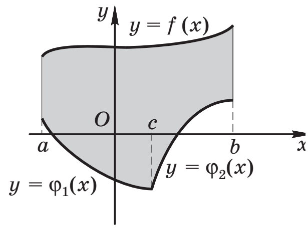


Рис. 4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. а) $y = x$, $x = 1$, $y = 0$; б) $y = 2x$, $y = 4x$, $x = 2$;

● в) $y = 2x$, $y = 4x$, $y = 3$;

● г) $3x - 4y + 11 = 0$, $4x + 3y - 27 = 0$, $x + 7y - 13 = 0$.

2. а) $y = x^2$, $x = -4$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 9$, $x = 0$;

в) $y = x^2 + 1$, $x = -3$, $x = 6$, $y = 0$;

г) $y = -3x^2 - 2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = -1$;

д) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; е) $y = x^2 - 5x + 4$, $y = 0$.

3. а) $y = x^2 - 2x + 3$, $x + y = 5$;

б) $y = x - 5 - 3x^2$, $y = 7x - 5$;

● в) $y = x^2 - 6x + 5$, $x = 11 - y$;

г) $y = x^2$, $|y| = x$;

д) $y^2 = 1 - x$, $y = 2x - 1$, $x = 0$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 7x - 12$, касательной к этой параболе, проходящей через ее вершину, и осями координат.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ и касательными к ней, проведенными в точках $A(1;\ 0{,}5)$ и $B(4;\ 2)$.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $y = -9x - 59$ и параболой $y = 3x^2 + ax + 1$, если известно, что касательная к параболе в точке $x = -2$ составляет с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 6$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = ax^2 + 12x - 14$ и прямой $y = 9x - 32$, если известно, что касательная, проведенная к параболе в точке $x = 3$, составляет с осью Ox угол, равный $\pi - \operatorname{arctg} 6$.

8. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = 3x^3 + 2x$ и прямыми $x = a$, $y = 0$, равна 1. Найдите a.

9. ● Найдите значения c, при которых площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 8x^2 - x^5$, прямыми $x = 1$, $x = c$ и осью абсцисс, равна $\frac{16}{3}$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

10. а) $y = \frac{5}{x}$, $y = 4$, $x = 7$; б) $y = \frac{1}{x-1}$, $y = 5 - 2x$;

в) $xy = 5$, $x + y = 6$; г) $x = |y - 2|$, $y = \frac{1}{1-x}$.

11. а) $y = \frac{8}{x^2}$, $y = x$, $x = 4$; б) $y = \frac{4}{x^2}$, $y = -4x$, $x = -2y$;

в) $y = -\frac{1}{x^3}$, $y = 27$, $16y = -x$.

12. Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = -\frac{4}{x}$, касательной к ней, проведенной в точке $x = 2$, и прямой $x = 3$.

13. ● Найдите значения c, при которых площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x^2}$, $x = 1$, $y = c$, равна $2\frac{1}{4}$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

14. а) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 3 - x$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $x = y^2$;

в) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4-3x}$, $y = 0$; г) $y = -x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = 8$.

15. а) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$;

б) $y = -x^2 + 6x - 2$, $y = x^2 - 2x + 4$;

в) $y = 2x^2 - x + 1$, $y = (x - 7)^2$, $x = 1{,}5$, $y = 0$.

16. а) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$;

б) $3 - y = \frac{4}{x+2}$, $y = x^2 - 1{,}5x + 1$;

в) $y = -2x^2 + 5x + 3$, $y + 1 = \frac{4}{x+1}$;

г) $y = -\frac{16}{x}$, $y = -x^3$, $y = 1$;

д) $y = \frac{8}{x^2}$, $2y = x^2$, $y = -8x$ $(x \geqslant -2)$;

е) $y = -\frac{1}{x}$, $y = x^2$, $8y = x^2$.

17. а) $y = \dfrac{3(x-1)}{x-2}$, $x = \dfrac{2(y+1)}{y-1}$, $x = 3$, $x = 5$;

б) $y = 1 + \dfrac{1}{3x-1}$, $y = \dfrac{1}{6x}$.

18. ▲ При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{2x-1}$, $x = 2$, $x = a$, равна $\ln \dfrac{4}{\sqrt{5}}$?

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

19. а) $y = 3^x$, $x = \log_3 4$, $x = \log_3 5$, $y = 0$;

б) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$;

в) $y = 2^x$, $x = 1$, $x = 5$, $y = x - 1$;

г) $y = x + 1$, $y = 3^{-x}$, $x = 2$, $x = 4$.

20. а) $y = e^x$, $y = e^3$, $x = 0$; б) $y = e^{-x}$, $y = e^{-4}$, $x = 1$;
в) $y = e^{-x}$, $y = x + 1$, $x = 5$; г) $y = |x - 1|$, $x = 2$, $y = e^x$.

21. ● Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 9^{-x} + 85$ и кривой $y = k \cdot 3^{-x} + m$, проходящей через точки $C(0; 34)$ и $D(1; 14)$.

22. ● Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 25^x + 16$ и кривой $y = b \cdot 5^x + 4$, у которой касательная в точке $x = 1$ составляет с осью Ox угол, равный $\mathrm{arctg}\,(40 \ln 5)$.

23. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y - 15 = e^{2x}$ и кривой $y = 7 \int e^x\,dx$, проходящей через точку $A(0; 10)$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

24. ● а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$;

б) $y = \sin 3x$, $x = \dfrac{\pi}{12}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $y = 0$;

в) $y = 2\cos x$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = 0$;

г) $y = \cos 2x$, $x = -\dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{8}$, $y = 0$.

25. а) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 1$, $y = \cos x$, $x = 0$, $y = 0$;

б) $y = \sin x$, $y = 0{,}5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;

в) $y = \sin x$, $y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $x = 0$, $x = \arcsin \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;

г) $y = 2 - |1 - x|$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = 2$.

26. ● Найдите значения k, при которых площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \frac{\pi}{18}$, $x = k$, $y = \sin 6x$ и осью абсцисс, равна $\frac{1}{6}$.

27. При каких значениях d площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos 5x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{30}$ и $x = d$, равна 0,2?

Вычислите интеграл:

28. ▲ а) $\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$; ● б) $\int\limits_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

29. ▲ а) $\int\limits_1^2 \ln x\, dx$; ▲ б) $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$.

30. Найдите $F(x)$, если: а) $F'(x) = 6x^2 - 2x + 3$ и $F(1) = 5$;
б) $F'(x) = 2 \sin 2x + 3x^2$ и $F(0) = 3$.

31. Найдите площадь фигуры:

● а) ограниченной параболой $y = 3x^2 - 4x + 2$ и прямой $y = 20 - x$;

● б) ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$;

● в) ограниченной линиями $y = 0$, $y = 2 - x$, $y = \sqrt{x}$.

32. Найдите площадь фигуры:

▲ а) ограниченной линиями $y = 4^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $x = 0$;

● б) ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ и той касательной к линии $y = \ln x$, которая проходит через точку с абсциссой $x = 1$;

● в) ограниченной параболой $y = x^2 - x + 2$ и той касательной к кривой $y = \ln x + 3$, которая проходит через точку с абсциссой $x = 1$.

Глава VI

Числовые последовательности. Прогрессии. Предел функции. Непрерывность

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. Функцию, определенную на множестве натуральных чисел N и принимающую числовые значения, называют *числовой последовательностью*.

Обозначение: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ или, кратко, $\{x_n\}$.

Определение 2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две числовые последовательности, то $\{x_n + y_n\}$ называют *суммой* этих последовательностей, $\{x_n - y_n\}$ — *разностью* этих последовательностей, $\{x_n\ y_n\}$ — *произведением* этих последовательностей, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $y_n \neq 0$ — *частным* этих последовательностей.

Последовательность называют: 1) *ограниченной сверху*, если найдется такое a, что $x_n \leqslant a$ для всех $n \in N$; 2) *ограниченной снизу*, если найдется такое b, что $x_n \geqslant b$ для всех $n \in N$; 3) *ограниченной сверху и снизу*, если найдется такое c, что $|x_n| \geqslant c$ для всех $n \in N$.

Понятие предела последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ имеет своим *пределом* число a (сходится к a), т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > n_0(\varepsilon)$.

В частности, $\{x_n\}$ называют *бесконечной малой*, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Последовательность, не имеющую предела, называют *расходящейся*.

Последовательность $\{x_n\}$ называют: 1) *монотонно возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$; 2) *монотонно убывающей*, если $x_{n+1} < x_n$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

Признаки существования предела

1. Если $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = c$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

2. Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

3. *Критерий Коши*. Для существования предела последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - x_m| < \varepsilon$ при всех $n > n_0(\varepsilon)$ и всех $m \in \boldsymbol{N}$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть существуют $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$, тогда:

1. Если $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} y_n$;

2. $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} y_n$;

3. $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} y_n$;

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}$, если $y_n \neq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n \neq 0$.

Число e. Число e определяется следующим образом: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281\ldots$ Это число является основанием натурального логарифма (обозначение: $\ln x$).

Бесконечный предел. Символическая запись $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ означает, что для любого $E > 0$ существует $n_0 = n_0(E)$ такое, что $|x_n| > E$ при всех $n > n_0(E)$.

ТЕОРЕМЫ о бесконечно малых и бесконечно больших последовательностях.

1. Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая последовательность, и наоборот, если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая последовательность.

2. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

3. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

4. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

5. Если $\{x_n\}$ — постоянная бесконечно малая последовательность, то $x_n = 0$.

1. Используя определение предела числовой последовательности, докажите, что:

▲ а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$; ● б) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$; ● в) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

2. ▲ Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, заданная формулой $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n^2}$, ограничена.

Установите, какие из последовательностей ($n \in N$) являются ограниченными:

3. а) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{3n}, \ldots$;

б) $-2, -2, -2, \ldots, -2, \ldots$;

в) $4, \frac{2}{1}, 4, \frac{2}{2}, 4, \frac{2}{3}, \ldots, 4, \frac{2}{n}, \ldots$;

г) $1, -2, 3, -4, \ldots, n, -(n+1), \ldots$.

4. а) $\cos 1°, \cos 2°, \cos 3°, \ldots, \cos n°, \ldots$;

б) $0, 1, 0, 3, 0, 5, \ldots, 0, 2n-1, \ldots$;

в) $1, -2, 4, -8, \ldots, (-1)^{n-1} 2^{n-1}, \ldots$;

г) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n-1}, \ldots$.

5. Всякая ли ограниченная последовательность сходится?

6. Дайте определение неограниченной последовательности (не употребляя частицы «не»).

7. Используя теорему о пределе суммы двух сходящихся последовательностей, докажите, что:

● а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} + \frac{2-3n^2}{n^2+1}\right) = -2;$

● б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n-1}{n^2-1}\right) = 0.$

8. Известно, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Сходятся ли последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$?

9. Используя теорему о пределе произведения двух сходящихся последовательностей, докажите, что:

● а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(1+5n^3)(1-n+n^2)}{n^2(n^3+3)} = 5;$

● б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(15 + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n-7}{n-6} = 15.$

10. ▲ Известно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится. Докажите, что последовательность $\{-x_n\}$ также сходится, причем если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (-x_n) = -a$.

11. ▲ Дано: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$. Докажите, что

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = a - b.$$

12. Известно, что последовательность a_n, $n \in N$, сходится, а последовательность b_n, $n \in N$, расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательности: а) $\{a_n + b_n\}$; б) $\{a_n b_n\}$?

13. Последовательности a_n и b_n, $n \in N$, расходятся. Можно ли утверждать, что также расходится последовательность: а) $\{a_n + b_n\}$; б) $\{a_n b_n\}$?

14. Последовательности a_n и b_n, $n \in N$, таковы, что $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n b_n) = 0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, либо $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$?

Установите, какие из последовательностей являются монотонными:

15. а) $\left\{\frac{4n+1}{5n-1}\right\}$; б) $\left\{(-1)^{n+1}\,\frac{2n+3}{n+7}\right\}$; в) $\left\{\frac{6n+4}{3n+2}\right\}$; г) $\left\{\frac{4n}{4n+7}\right\}$.

16. а) $\{n^{(-1)^n}\}$; б) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$; в) $\{(2 + (-1)^n)n\}$; г) $\left\{4 - \dfrac{5}{3^n}\right\}$;

д) $\left\{2 + \dfrac{1}{4^n}\right\}$.

17. ▲ Докажите, что последовательность $\left\{\dfrac{5n}{n+2}\right\}$ ограничена и возрастает.

18. ● Докажите, что последовательность $\left\{\dfrac{4^n+1}{4^n}\right\}$ ограничена и убывает.

19. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю, а последовательность $\{y_n\}$ — произвольная. Можно ли утверждать, что предел последовательности $\{x_n\, y_n\}$ равен нулю?

Найдите предел последовательности:

20. ▲ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n+1)(n-3)}{(n+2)(n+4)}$.

21. ● $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n^3-4}{n^4+6}$.

22. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n^8-n^7+1}{2-3n^8}$.

23. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+3)^2}{5n^2-n+1}$.

24. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^n(n-2)^2}{3^{n+3}n^2}$.

25. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-3n+(-1)^n}{4n-(-1)^n}$.

26. ● $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n\sin n}{n^2+1}$.

27. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

28. ● $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n$, $1! = 1$, $n \in N$).

29. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+4)!}$.

30. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^n-1}{3^n+1}$.

31. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}$.

32. ● $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

33. ● $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$.

34. ● а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

● в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots\right.$

$$\left.\ldots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right).$$

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n-b^{-n}}{b^n+b^{-n}}$, $b\neq 0$.

§ 2. ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия. Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называют *арифметической прогрессией*. Число d называют *разностью* арифметической прогрессии.

Последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда при любом $n > 1$ верно равенство

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}).$$

Более общее равенство имеет вид

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-m} + a_{n+m}),\ n - m > 0.$$

Для арифметической прогрессии справедливы формулы

$$a_n = a_1 + d(n-1), \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n,$$

где S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, т. е. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Геометрическая прогрессия. Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называют *геометрической прогрессией*.

Число q называют *знаменателем* геометрической прогрессии.

Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда при любом $n > 1$ верно равенство

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$\Big($если члены прогрессии — положительные числа, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}\Big)$.

Более общее равенство имеет вид

$$b_{n^2} = b_{n-m} \cdot b_{n+m}, \ n - m > 0.$$

Для геометрической прогрессии справедливы формулы

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},$$

где $q \neq 1$, S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии. Если $q = 1$, то $S_n = b_1 n$.

Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называют геометрическую прогрессию $\{b_n\}$, у которой $|q| < 1$, где q — знаменатель прогрессии. Сумма членов этой прогрессии определяется равенством

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

где $S_n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1}$.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$. Учитывая это равенство и теоремы о пределах числовых последовательностей, получаем

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} \lim_{n \to \infty} (1 - q^n) =$$
$$= \frac{b}{1-q} \left(\lim_{n \to \infty} 1 - \lim_{n \to \infty} q^n \right) = \frac{b}{1-q} (1 - 0),$$

т. е.

$$S = b + bq + bq^2 + \ldots = \frac{b}{1-q}.$$

1. ● Первый член арифметической прогрессии равен 1, а разность прогрессии равна 4. Является ли число 10 091 членом этой прогрессии?

2. Сколько имеется двузначных натуральных чисел, кратных 7?

3. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 4.

4. ▲ Найдите арифметическую прогрессию, если сумма всех ее членов без первого равна −36, сумма всех ее членов без последнего равна нулю, а разность десятого и шестого членов равна −16.

5. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56, сумма последних четырех членов равна 112. Найдите прогрессию, если ее первый член равен 11.

6. Сумма всех членов арифметической прогрессии без первого члена равна 99, а без шестого равна 89. Найдите прогрессию, если сумма первого и пятого членов равна 10.

7. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

8. ▲ Все члены арифметической прогрессии — натуральные числа. Сумма ее девяти последовательных членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найдите прогрессию, если ее второй член равен 12.

9. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 30, а сумма квадратов первого и второго членов равна 116. Найдите первый член прогрессии, если известно, что ее пятый член делится нацело на 13.

10. Найдите возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма квадратов их равна 275.

11. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке −6. Найдите первый член и разность прогрессии.

12. ▲ Сумма трех чисел равна 0,6(1), а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Определите эти числа.

13. Сумма первых семи последовательных членов арифметической прогрессии равна нулю, а сумма их квадратов равна a^2. Найдите эту прогрессию.

14. ▲ Произведение второго и двенадцатого членов арифметической прогрессии равно 1, а произведение четвертого и десятого членов равно b. Найдите седьмой член прогрессии.

15. Сумма квадратов пятого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 3, а произведение второго и четырнадцатого членов равно k. Найдите произведение первого и пятнадцатого членов прогрессии.

16. Сумма квадратов четвертого и десятого членов арифметической прогрессии равна b, а сумма квадратов пятого и девятого членов равна 1. Определите произведение второго и двенадцатого членов прогрессии.

17. В арифметической прогрессии $S_p = q$; $S_q = p$ (S_n есть сумма n первых членов прогрессии). Найдите S_{p+q}.

18. ▲ Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна половине суммы следующих n членов прогрессии. Найдите отношение суммы первых $3n$ членов прогрессии к сумме ее первых n членов.

19. ▲ Четыре целых различных числа составляют арифметическую прогрессию. Одно из этих чисел равно сумме квадратов остальных трех чисел. Найдите эти числа.

20. На дороге на расстоянии 10 м друг от друга лежит некоторое количество столбов. Начав с одного крайнего столба, рабочий перенес все столбы по одному к другому крайнему столбу, причем для этого ему в общей сложности пришлось пройти 1,44 км. Сколько столбов лежало на дороге?

21. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит n членов. Их первые члены соответственно равны 1, 2, 3, ..., p, а разности равны 1, 3, 5, ..., $2p - 1$. Найдите сумму членов всех прогрессий.

22. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, а разность прогрессии больше 0,5. При каком значении разности прогрессии произведение первого, четвертого и пятого ее членов будет наибольшим?

23. Определите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма первого и третьего членов равна 40, а сумма второго и четвертого членов равна 80.

24. Определите сумму первых трех членов геометрической прогрессии, у которой разность между вторым и первым членами равна 6, а разность между четвертым и третьим равна 54.

25. В геометрической прогрессии сумма первого и четвертого членов равна 18, а сумма второго и третьего членов равна 12. Найдите разность между третьим и вторым членами прогрессии.

26. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма первых трех ее членов равна 26. Найдите прогрессию.

27. В геометрической прогрессии сумма первых 18 членов больше суммы первых 10 членов на A, а сумма первых семи членов прогрессии, сложенная с числом B, равна сумме первых пятнадцати членов этой же прогрессии. Найдите знаменатель прогрессии.

28. В геометрической прогрессии сумма первых 109 членов больше суммы первых 100 членов прогрессии на 12. Найдите сумму первых девяти членов прогрессии, если ее знаменатель равен q.

29. ▲ В геометрической прогрессии 1000 членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна S_1, а сумма членов с четными номерами равна S_2. Найдите знаменатель прогрессии.

30. Сумма первых десяти членов геометрической прогрессии равна S_1, а сумма следующих десяти членов (с 11-го до 20-го) равна S_2. Найдите знаменатель прогрессии.

31. ▲ В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

32. ▲ Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше него. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым за время, на $\frac{2}{3}$ мин большее, чем первый. Найдите скорость первого конькобежца.

33. ● Пусть S_n есть сумма n первых членов геометрической прогрессии. Докажите, что $S_n\,(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

34. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в 3 раза больше суммы трех ее первых членов.

35. ▲ Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3,5, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна $\frac{147}{16}$. Найдите сумму кубов членов прогрессии.

36. Сумма второго и восьмого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{325}{128}$, а сумма второго и шестого членов, уменьшенная на $\frac{65}{32}$, равна четвертому члену этой же прогрессии. Найдите сумму квадратов членов прогрессии.

37. Разность между вторым и шестым членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{8}{9\sqrt{3}}$, а разность между четвертым и восьмым членами той же прогрессии равна $\frac{8}{27\sqrt{3}}$. Найдите отношение суммы квадратов членов к сумме кубов членов прогрессии.

38. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 243, а сумма ее первых пяти членов равна 275. Найдите прогрессию.

39. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x) = x^3 + 3x - 9$ на отрезке $[-2; 3]$, а разность между первым и вторым членами прогрессии равна $f'(0)$. Найдите знаменатель прогрессии.

40. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

41. Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 4, 19, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

42. Три положительных числа образуют арифметическую прогрессию. Третье число больше первого на 14. Если к третьему числу прибавить первое, а остальные два оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

43. Первый и третий члены арифметической прогрессии соответственно равны первому и третьему членам геометрической прогрессии, а второй член арифметической прогрессии превышает второй член геометрической прогрессии на 0,25. Вычислите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2.

44. Найдите трехзначное число, цифры которого в порядке следования образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же вторую цифру искомого числа увеличить на 2, то цифры полученного числа образуют арифметическую прогрессию.

45. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если третий член уменьшить на 64, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Если же затем второй член этой прогрессии уменьшить на 8, то получится геометрическая прогрессия. Определите эти числа.

46. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 8, то эти числа составят арифметическую прогрессию; если же затем к третьему числу прибавить 64, то полученные числа снова составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

47. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Определите знаменатель данной прогрессии.

48. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 124. Если к первому числу прибавить 1, из третьего вычесть 65, а второе оставить без изменения, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите указанные прогрессии.

49. Три числа, произведение которых равно 125, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии и одновременно первым, третьим и шестым членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

50. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, третий член которой, утроенное произведение первого члена на четвертый и второй член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной 0,125.

51. Если к четырем числам, составляющим арифметическую прогрессию, прибавить соответственно 5, 6, 9 и 15, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

52. Если к четырем числам, составляющим геометрическую прогрессию, прибавить соответственно 4, 21, 29 и 1, то получатся четыре числа, составляющих арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

53. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 155, а сумма первых двух членов геометрической прогрессии равна 9. Определите эти прогрессии, если первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической прогрессии, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической прогрессии.

54. Среднее геометрическое двух чисел на 12 больше меньшего из них, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из них. Найдите эти числа.

55. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

56. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{1}{2}$, а сумма квадратов ее членов равна $\frac{1}{8}$. Найдите прогрессию.

57. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую; сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних чисел равна 12.

58. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна 243, а сумма ее первых пяти членов равна 275. Найдите прогрессию.

59. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна $\frac{3}{2}$, а сумма кубов ее членов равна $\frac{54}{7}$. Найдите прогрессию.

60. Найдите три числа, образующих геометрическую прогрессию, если их сумма равна 21, а сумма их квадратов равна 189.

§ 3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Окрестностью точки x_0 называют интервал с центром в точке x_0. *Выколотой окрестностью* точки x_0 называют интервал с центром в точке x_0 и исключенной точкой x_0. В дальнейшем будем считать функции определенными в выколотых окрестностях.

Предел функции в точке. Число a называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Односторонние пределы. Число b называют *пределом справа* функции $f(x)$ в точке x_0 и пишут $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, если $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$; число c называют *пределом слева* в точке x_0 и пишут $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = c$, если $|f(x) - c| < \varepsilon$ при $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$.

Пределы на бесконечности. Число b называют *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$ и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $E(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x > E(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Аналогично определяются пределы функции при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$, если $|f(x) - c| < \varepsilon$ при всех $x < -E(\varepsilon)$;

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = d$, если $|f(x) - d| < \varepsilon$ при всех $|x| > E(\varepsilon)$.

Функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Функцию $\beta(x)$ называют *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$.

Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая и $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая; если $\beta(x)$ — бесконечно большая, то $\dfrac{1}{\beta(x)}$ — бесконечно малая.

Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы в одной и той же области и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = b$, тогда:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a + b$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a - b$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = ab$.
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \dfrac{a}{b}$, если $\varphi(x) \neq 0$, $b \neq 0$.

Определение 1. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2. Функцию, непрерывную в каждой точке интервала (отрезка), называют *непрерывной на интервале* (отрезке).

Найдите предел:

1. ▲ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

2. ● $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

3. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$.

4. ● $\lim\limits_{x \to 1} \left[\left(\dfrac{4}{x^2 - x^{-1}} - \dfrac{1 - 3x + x^2}{1 - x^3} \right)^{-1} + 3\dfrac{x^4 - 1}{x^3 - x^{-1}} \right]$.

5. ▲ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x}{5x - 1} \cdot \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 1} \right)$.

6. ● $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2 - 4} - \dfrac{x^2}{3x + 2} \right)$.

7. ● $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

8. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}$.

9. ▲ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

10. ▲ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$.

11. ▲ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}$.

12. ● $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x - b} - \sqrt{a - b}}{x^2 - a^2}$, $a \neq 0$, $a > b$.

13. ▲ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

14. ▲ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$.

15. ▲ $\lim\limits_{x \to a} \left\{ \left[\left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x}} \right)^{-1} - \dfrac{2\sqrt[4]{ax}}{x^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{3}{4}}} \right]^{-1} - \sqrt{2}^{\log_4 a} \right\}^8$.

16. ▲ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2^x + 2^{3 - x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1 - x}}$.

17. ▲ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$.

18. ▲ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.

19. ▲ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

20. ▲ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x}$.

21. ● $\lim\limits_{x \to 0} \sin 8x \operatorname{ctg} 3x$.

22. ● $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2+3x-1)\operatorname{tg} x}{x^2+2x}$.

23. ● $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x \sin x - \operatorname{tg} x}{x^2 \sin x}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{3x^2}$.

26. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1-\cos 7(\pi - x)}{5(x-\pi)^n}$, $n = 1, 2$.

27. ● $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$.

28. ▲ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

29. ▲ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

30. Найдите точки разрыва функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{при } x \neq 0, \\ -2 & \text{при } x = 0; \end{cases}$

в) $f(x) = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$; г) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; д) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$; е) $f(x) = [x]$.

Найдите предел:

31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$.

32. ▲ $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$.

33. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{(x+2)(x+3)} - x)$.

34. ▲ $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{(x+2)(x+3)} + x)$.

35. ▲ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(\sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt[3]{1-x^3})$.

36. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})$.

37. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$.

38. ● $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$.

39. ▲ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x+1}}$.

40. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right)$.

41. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

42. ▲ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}}{3^n}\right)$.

43. ▲ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}\right)$.

44. Установите, для каких значений A непрерывна функция:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ A & \text{при } x=0;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ A & \text{при } x=0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{при } x\neq 1,\\ A & \text{при } x=1.\end{cases}$

Глава VII

Элементы векторной алгебры

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

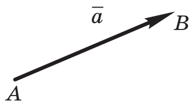


Рис. 5

Понятие вектора. Проекции вектора. *Вектором* называют направленный отрезок; его обозначают $\overline{a}$ или $\overline{AB}$, где A — начало вектора (точка приложения), B — конец вектора (рис. 5). Число, равное длине вектора, называют *модулем вектора* и обозначают $|\overline{a}|$. Если $|\overline{a}| = 1$, то вектор $\overline{a}$ называют *единичным*.

Вектор называют *нулевым* и пишут $\overline{0}$, если конец вектора совпадает с его началом.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ *на ось* u (обозначение: $\text{пр}_u\, \overline{AB}$) называют число, равное величине отрезка $\overline{A_1B_1}$ оси u, где A_1 и B_1 — соответственно проекции точек A и B на ось u. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось u выражается через его модуль и угол φ наклона вектора к этой оси формулой

$$\text{пр}_u\, \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi. \tag{1}$$

Проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси в заданной системе координат обозначают буквами X, Y, Z. Равенство $\overline{a} = \{X;\ Y;\ Z\}$ означает, что X, Y, Z — проекции вектора на координатные оси. Числа X, Y, Z называют (декартовыми) *координатами* вектора. Если точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — начало и конец вектора, то его координаты X, Y, Z определяют по формулам

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1.$$

В декартовой прямоугольной системе координат формула

$$|\overline{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2}$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.

Если α, β, γ — углы, которые составляет вектор $\overline{a}$ с координатными осями, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют *направляющими косинусами* вектора $\overline{a}$. Согласно формуле (1),

$$X = |\overline{a}|\cos\alpha,\ Y = |\overline{a}|\cos\beta,\ Z = |\overline{a}|\cos\gamma,$$

откуда в силу формулы (2) имеем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Линейные операции над векторами. *Суммой* $\overline{a} + \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ (рис. 6), при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (*правило треугольника*). Наряду с правилом треугольника используют *правило параллелограмма*: если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приложены к общему началу и на них построен параллелограмм (рис. 7), то сумма $\overline{a} + \overline{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма и идущий от общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$; отсюда следует, что $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

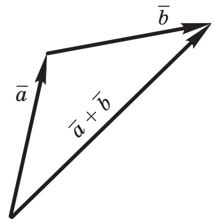


Рис. 6

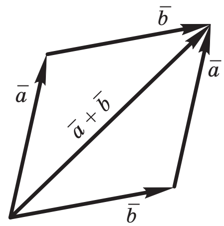


Рис. 7

Сложение более чем двух векторов производят с помощью последовательного применения правила треугольника.

Разностью $\overline{a} - \overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют вектор, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приложить к общему началу, то их разность $\overline{a} - \overline{b}$ есть вектор, идущий из конца вектора $\overline{b}$ к концу вектора $\overline{a}$. Два вектора равной длины, лежащие на одной прямой и направленные в разные стороны, называют *противоположными*: если один из них есть $\overline{a}$, то другой обозначают $-\overline{a}$. Легко установить, что $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$.

Произведением $\alpha\overline{a}$ *вектора* $\overline{a}$ *на число* α ($\alpha \in \boldsymbol{R}$) называют вектор, модуль которого $|\alpha\overline{a}| = |\alpha|\,|\overline{a}|$, параллельный вектору $\overline{a}$, направленный так же, как и вектор $\overline{a}$, если $\alpha > 0$, и в противоположную сторону, если $\alpha < 0$.

Сложение векторов и умножение вектора на число называют *линейными операциями над векторами*.

Имеют место две основные ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКЦИЯХ ВЕКТОРОВ.

1. Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось:

$$\text{пр}_u\,(\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}) = \text{пр}_u\,\overline{a_1} + \text{пр}_u\,\overline{a_2} + \ldots + \text{пр}_u\,\overline{a_n}.$$

2. При умножении вектора на число его проекция умножается на это число:

$$\text{пр}_u\,(\alpha\overline{a}) = \alpha\ \text{пр}_u\,\overline{a}.$$

В частности, если $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то

$$\overline{a} + \overline{b} = \{X_1 + X_2; Y_1 + Y_2; Z_1 + Z_2\},$$

$$\overline{a} - \overline{b} = \{X_1 - X_2; Y_1 - Y_2; Z_1 - Z_2\}.$$

Если $\overline{a} = \{X; Y; Z\}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, то $\alpha\overline{a} = \{\alpha X; \alpha Y; \alpha Z\}$.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называют *коллинеарными*. Признаком коллинеарности двух векторов $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ является пропорциональность их координат:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ... , $\overline{a_n}$ называют сумму произведений этих векторов на произвольные действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \ldots + \alpha_n\overline{a_n}. \tag{3}$$

Определение 1. Векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ... , $\overline{a_n}$ называют *линейно зависимыми*, если найдутся такие действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \ldots + \alpha_n\overline{a_n} = \overline{0}.$$

Определение 2. Векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, ... , $\overline{a_n}$ называют *линейно независимыми*, если равенство нулю их линейной комбинации (3) возможно лишь при условии, что все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю.

В том случае, когда векторы линейно зависимы, хотя бы один из векторов является линейной комбинацией остальных векторов. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то существует λ такое, что выполняется равенство $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то они линейно независимы.

Векторы называют *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то для любого вектора $\overline{c}$, лежащего в одной плоскости с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, найдутся такие числа $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, что справедливо равенство

$$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}.$$

Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, то они линейно зависимы. Среди трех некомпланарных векторов не может быть двух коллинеарных векторов и не может быть ни одного нулевого вектора.

Понятие базиса. Говорят, что три линейно независимых вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют в пространстве *базис*, если любой вектор $\overline{d}$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов. Если в пространстве даны любые три некомпланарных вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, то любой вектор $\overline{d}$ можно представить в виде линейной комбинации данных векторов:

$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}.$$

Декартова прямоугольная система координат. Тройку векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ называют *координатным базисом*, если эти векторы удовлетворяют следующим условиям:

1) векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ лежат соответственно на осях Ox, Oy, Oz;

2) направление каждого из векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ совпадает с положительным направлением соответствующей оси;

3) векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ единичные, т. е. $|\overline{i}| = 1$, $|\overline{j}| = 1$, $|\overline{k}| = 1$.

Любой вектор $\overline{a}$ пространства можно разложить по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, т. е. представить его в виде

$$\overline{a} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k},$$

где X, Y, Z — координаты вектора, т. е. проекции вектора $\overline{a}$ на соответствующие оси.

Если α, β, γ — углы, которые вектор $\overline{a}$ составляет с осями Ox, Oy, Oz, то

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \ \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \ \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

1. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы выполнялось соотношение:

а) $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}|$; б) $|\overline{a}+\overline{b}| > |\overline{a}-\overline{b}|$; в) $|\overline{a}+\overline{b}| < |\overline{a}-\overline{b}|$?

2. Ненулевые векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ связаны соотношениями $\overline{b} = 5\overline{a}$ и $\overline{c} = -2\overline{b}$. Определите: а) угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{c}$; б) $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{c}|}$.

3. ● При каких x справедливо неравенство $|(x-2)\overline{a}| < |3\overline{a}|$, если $\overline{a} \neq \overline{0}$?

4. ● Пусть $\overline{a} \neq \overline{0}$. При каких x справедливы одновременно условия $|x\overline{a}| \geqslant |\overline{a}|$ и $(x\overline{a} + 3\overline{a}) \uparrow\uparrow \overline{a}$?

5. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны. Найдите значения x и y, при которых справедливо векторное равенство $2\overline{u} - \overline{v} = \overline{w}$, если $\overline{u} = x\overline{a} + 2y\overline{b}$, $\overline{v} = -2y\overline{a} + 3x\overline{b}$, $\overline{w} = 4\overline{a} - 2\overline{b}$.

6. ▲ Даны три ненулевых вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, каждые два из которых не коллинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\overline{a} + \overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{c}$, а вектор $\overline{b} + \overline{c}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$.

7. ▲ Даны три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Найдите числа p и q, при которых векторы $p\overline{a} + q\overline{b} + \overline{c}$ и $\overline{a} + p\overline{b} + q\overline{c}$ коллинеарны.

8. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ коллинеарны и $|\overline{c}| < |\overline{b}| < |\overline{a}|$. Верно ли утверждение $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \uparrow\uparrow \overline{a}$?

9. Точки A, B, C —вершины треугольника, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$. Найдите разложение вектора $\overline{AO}$, где O — точка пересечения медиан данного треугольника, по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

10. ▲ Точки M и K — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Найдите вектор $\overline{AC}$, если $\overline{AM} = \overline{a}$, $\overline{AK} = \overline{b}$.

11. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы вектор $\overline{a} + \overline{b}$ делил пополам угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

12. Точки A, B, C — вершины треугольника, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, AD — биссектриса треугольника. Найдите орт $\overline{e}$, сонаправленный с вектором $\overline{AD}$.

13. Даны точки $A(1; 3)$, $B(2; 4)$ и $C(5; 14)$. Найдите:

а) $|\overline{AB} + \overline{AC}|$; б) $|\overline{AB} - \overline{AC}|$.

14. При каких значениях X и Y векторы $\overline{a} = \{X; -2; 5\}$ и $\overline{b} = \{1; Y; -4\}$ коллинеарны?

15. Найдите координаты вектора $\overline{p}$, коллинеарного вектору $\overline{q} = \{3; -4\}$, если известно, что вектор $\overline{p}$ образует с осью Ox тупой угол и $|\overline{p}| = 10$.

16. ▲ Даны три вектора: $\overline{a} = \{3; -1\}$, $\overline{b} = \{1; -2\}$, $\overline{c} = \{-1; 7\}$. Найдите разложение вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

17. ● При каких x и y точки $A(2; 0)$, $B(0; 2)$; $C(0; 7)$ и $D(x; y)$ являются последовательными вершинами равнобочной трапеции $ABCD$?

18. Точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2. Найдите вектор $\overline{M_1M_2}$, если известно, что $A_1(0; 1; 2)$, $A_2(1; 2; 1)$, $B_1(-1; -1; 3)$ и $B_2(1; 0; 0)$.

19. ● Даны четыре точки: $A(-2; -3; 8)$, $B(2; 1; 7)$, $C(1; 4; 5)$ и $D(-7; -4; 7)$. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны.

20. Векторы $\overline{AB} = -3\overline{i} + 4\overline{k}$ и $\overline{AC} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найдите длину медианы AM.

21. Найдите вектор $\overline{b} = \{X; Y; Z\}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2\sqrt{2}; -1; 4\}$, если $|\overline{b}| = 10$.

22. Вектор $\overline{x}$ удовлетворяет следующим условиям: а) $\overline{x}$ коллинеарен вектору $\vec{a} = 6\overline{i} - 8\overline{j} - 7{,}5\overline{k}$; б) $\overline{x}$ образует острый угол с осью Oz; в) $|\overline{x}| = 50$. Найдите координаты вектора $\overline{x}$.

23. Вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{3; -4; -12\}$, образует с осью Ox тупой угол. Зная, что $|\overline{b}| = 26$, найдите его координаты.

24. ● Найдите координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1; 2; 3)$ и $B(-3; 3; 2)$.

25. ● Треугольная пирамида задана координатами своих вершин: $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$, $D(0; -5; 4)$. Вычислите длину вектора $\overline{AO}$, если O — точка пересечения медиан треугольника BCD.

26. Компланарны ли векторы

$$\overline{a} = \left\{\frac{3}{7}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right\}, \quad \overline{b} = \left\{-\frac{3}{2}; 6; \frac{4}{3}\right\} \quad \text{и} \quad \overline{c} = \left\{\frac{9}{8}; -\frac{9}{2}; -1\right\}?$$

27. ● Даны три вектора: $\overline{a} = \{3; -2; 1\}$, $\overline{b} = \{-1; 1; -2\}$, $\overline{c} = \{2; 1; -3\}$. Найдите разложение вектора $\overline{d} = \{11; -6; 5\}$ по векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

28. ● В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагональ CB_1 делится точкой M в отношении $CM : MB_1 = 2 : 3$. Найдите разложение вектора $\overline{AM}$ по векторам $\overline{AA_1}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

29. ▲ В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $|AA_1| = 12$, $|AB| = 3$, $|AD| = 4$. Найдите разложение орта $\overline{e}$, сонаправленного с вектором $\overline{AC_1}$, по прямоугольному базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ сонаправлены соответственно с векторами $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AA_1}$.

30. ● Известно, что M_1 и M_2 являются соответственно точками пересечения медиан граней ADB и BDC тетраэдра $ABCD$. Найдите отношение $|\overline{AC}| : |\overline{M_1M_2}|$.

31. ▲ К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, пересекающихся в этой вершине. Найдите величину равнодействующей этих трех сил.

32. Вектор $\overline{OM}$ определен прямоугольными координатами точек $O(0;\ 0:\ 1)$ и $M(\alpha;\ \beta;\ 3)$. Какому условию должны удовлетворять параметры α и β, чтобы конец вектора $\overline{OM}$ принадлежал сфере $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$?

33. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - \beta\bar{k}$ коллинеарны?

34. Найдите вектор $\bar{a}$, если вектор $\bar{b} = \{1;\ 8;\ -4\}$, $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ и $|\bar{a}| = 3$.

35. Даны три вершины параллелограмма: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 3)$. Найдите длины его диагоналей AC и BD.

36. Найдите значения x, при которых векторы $\bar{a} = \{\cos 2x;\ \cos 3x\}$ и $\bar{b} = \{\sin 4x;\ \sin 5x\}$ имеют одинаковую длину.

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Таким образом,

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Отсюда следует, что

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Необходимым и достаточным условием ортогональности (перпендикулярности) двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Алгебраические свойства скалярного произведения

1°. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$.

2°. $(\alpha\overline{a})\overline{b} = \alpha(\overline{a}\overline{b})$, где α — число.

3°. $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{c} + \overline{b}\overline{c}$.

4°. $\overline{a}\overline{a} = |\overline{a}|^2 > 0$, если $\overline{a}$ — ненулевой вектор; $\overline{a}\overline{a} = 0$, если $\overline{a}$ — нулевой вектор.

Проекция вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$ (пишут $\text{пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}$) выражается формулой

$$\text{пр}_{\overline{a}}\ \overline{b} = |\overline{b}|\cos\varphi = \frac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}|}.$$

Выражение скалярного произведения в декартовых координатах. Пусть $\overline{a} = X_1\overline{i} + Y_1\overline{j} + Z_1\overline{k}$, $\overline{b} = X_2\overline{i} + Y_2\overline{j} + Z_2\overline{k}$. Тогда справедлива формула

$$\overline{a}\overline{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Необходимым и достаточным условием ортогональности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является равенство

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

1. Определите угол между векторами $2\overline{a}$ и $\frac{1}{2}\overline{b}$, если

$$\overline{a} = \{-4;\ 2;\ 4\}, \qquad \overline{b} = \{\sqrt{2}\,;\ -\sqrt{2}\,;\ 0\}.$$

2. При каком значении z векторы $\overline{a} = \{6;\ 0;\ 12\}$ и $\overline{b} = \{-8;\ 13;\ z\}$ перпендикулярны?

3. ▲ Найдите косинус угла между векторами $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 60°$.

4. ▲ Найдите косинус угла между векторами $\overline{p}$ и $\overline{q}$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{cases} 2\overline{p} + \overline{q} = \overline{a}, \\ \overline{p} + 2\overline{q} = \overline{b}, \end{cases}$$

если известно, что в прямоугольной системе координат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют вид $\overline{a} = \{1;\ 1\}$, $\overline{b} = \{1;\ -1\}$.

5. ● Докажите, что вектор $\overline{p} = \overline{b}(\overline{a}\overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}\overline{b})$ перпендикулярен вектору $\overline{a}$.

6. ▲ Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ таковы, что $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$. Зная, что $|\overline{a}| = 13$, $|\overline{b}| = 14$, $|\overline{c}| = 15$, вычислите $\overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{c}\overline{a}$.

7. ● Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 2)$, $C(3;\ 3;\ 1)$. Найдите угол при вершине A.

8. Вершины треугольника находятся в точках $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 2)$ и $C(1;\ 2;\ 5)$. Найдите величину угла, образованного медианой BD с основанием треугольника AC.

9. ● Треугольник задан координатами своих вершин: $A(1;\ 1;\ 2)$, $B(3;\ 4;\ 2)$ и $C(5;\ 6;\ 4)$. Найдите величину внешнего угла треугольника при вершине B.

10. Двумя вершинами треугольника ABC являются точки $A(1;\ 1;\ 3)$ и $B(-1;\ 2;\ 5)$. Третья вершина — точка C — находится на координатной оси Oz. Установите зависимость между величиной угла α при вершине A и расстоянием z точки C до плоскости xOy.

11. ● На координатной плоскости заданы точки $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ и $C(5;\ 5)$. Вычислите площадь треугольника ABC.

12. ● Векторы $\overline{AB} = \{3;\ -2;\ 2\}$ и $\overline{BC} = \{-1;\ 0;\ 2\}$ являются смежными сторонами параллелограмма. Определите величину угла между его диагоналями $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

13. Докажите, что точки $A(2;\ 4;\ -4)$, $B(1;\ 1;\ -3)$, $C(-2;\ 0;\ 5)$, $D(-1;\ 3;\ 4)$ являются вершинами параллелограмма, и вычислите величину угла между его диагоналями.

14. Докажите, что точки $A(1;\ -1;\ 1)$, $B(1;\ 3;\ 1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$, $D(4;\ -1;\ 1)$ являются вершинами прямоугольника. Найдите длину его диагоналей и координаты их точки пересечения.

15. ▲ Найдите вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2;\ 1;\ -1\}$ и удовлетворяющий условию $\overline{a}\overline{b} = 3$.

16. Найдите вектор $\overline{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a} = \{2;\ 3;\ -1\}$ и $\overline{b} = \{1;\ -2;\ 3\}$ и удовлетворяет условию $\overline{c}(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = -6$.

17. Найдите координаты вектора $\overline{c}$, перпендикулярного векторам $\overline{a} = 2\overline{j} - \overline{k}$ и $\overline{b} = -\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$ и образующего тупой угол с осью Oy, если $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.

18. Даны векторы $\overline{a} = \{3;\ -1;\ 5\}$ и $\overline{b} = \{1;\ 2;\ -3\}$. Найдите вектор $\overline{c}$ при условии, что он перпендикулярен оси Oz и удовлетворяет условиям $\overline{c}\overline{a} = 9$, $\overline{c}\overline{b} = -4$.

19. ▲ Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найдите координаты вектора $\overline{c}$, если $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{j} + \overline{k}$.

20. В декартовой прямоугольной системе координат xOy на кривой $y = \dfrac{6}{x}$ заданы две точки A и B такие, что $\overline{OA}\,\overline{i} = -2$ и $\overline{OB}\,\overline{i} = 3$, где $\overline{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найдите длину вектора $2\overline{OA} + 3\overline{OB}$.

21. Найдите вектор $\overline{a} = \{X; Y; Z\}$, образующий равные углы с векторами $\overline{b} = \{Y; -2Z; 3X\}$ и $\overline{c} = \{2Z; 3X; -Y\}$, если вектор $\overline{a}$ перпендикулярен вектору $\overline{d} = \{1; -1; 2\}$, $|\overline{a}| = 2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\overline{a}$ и осью Oy тупой.

22. ● При каких значениях x угол между векторами $\overline{a} = x\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}$ и $\overline{b} = 2x\overline{i} + x\overline{j} - \overline{k}$ острый, а угол между вектором $\overline{b}$ и осью ординат тупой?

23. ● Точки M, N, P, Q расположены в пространстве так, что $MN \perp PQ$, $MP \perp NQ$. Докажите, что $MQ \perp NP$.

24. ▲ Вычислите величину тупого угла, образованного медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

25. ▲ Даны векторы $\overline{AB} = \overline{b}$ и $\overline{AC} = \overline{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найдите разложение по базису $\overline{b}$, $\overline{c}$ вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BM.

26. ● Треугольник ABC задан координатами вершин: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$. Найдите вектор $\overline{BM}$, где точка M — основание высоты, проведенной из вершины B.

27. ● Тетраэдр $ABCD$ задан координатами своих вершин: $D(1; 0; 0)$, $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(4; 0; 3)$. Найдите величину двугранного угла, образованного боковой гранью ADC и плоскостью основания ABC.

28. ▲ Напишите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(0; 3; 0)$ и $M_3(2; 1; 0)$.

29. ▲ Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; 0; 0)$ и $B(0; 0; 4)$ и параллельной оси Oy.

30. ▲ При каком значении k точки $A(1; 0; 3)$, $B(-1; 3; 4)$, $C(1; 2; 1)$ и $D(k; 2; 5)$ лежат в одной плоскости?

31. Даны четыре точки: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$.

● а) Докажите, что эти точки лежат и одной плоскости;

б) определите величину угла между прямыми AC и BD;

● в) определите площадь четырехугольника $ABCD$.

32. ● Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 2; 1)$, и плоскостью, проходящей через точки A, B и $D(3; 1; 2)$.

33. Даны уравнения плоскостей $2x + 3y + 4z - 8 = 0$ и $4x + y + 3z - 6 = 0$; p — прямая, по которой пересекаются эти плоскости. Определите:

▲ а) координаты точек пересечения прямой p с плоскостями xOy и yOz;

● б) величину угла между прямой p и плоскостью xOz.

34. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, равна 12. Вершина B куба совпадает с началом координат $Oxyz$, а точки A, C и B_1 расположены на осях Ox, Oy, Oz соответственно (в положительном направлении). На ребрах AA_1, B_1C_1 и CD взяты точки E, F_1, G такие, что $AE : EA_1 = 1 : 3$, $B_1F_1 : F_1C_1 = 1 : 1$, $CG : GD = 1 : 1$.

а) Определите координаты точек E, F_1 и G;

б) составьте уравнение плоскости EF_1G;

● в) найдите расстояние от точки B_1 до плоскости EF_1G.

35. Найдите угол между векторами $\overline{a} = \{-3; -6; 2\}$ и $\overline{b} = \{2; 2; 1\}$.

36. Даны векторы $\overline{a} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = 7\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}$. Найдите $\cos \angle(\overline{a} - \overline{b}, \overline{c})$.

37. Найдите вектор $\overline{a}$, коллинеарный вектору $\overline{b} = \{3; 6; 6\}$ и удовлетворяющий условию $\overline{a}\overline{b} = 27$.

38. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$. Вычислите $(\overline{a} + \overline{b})^2$.

39. Найдите длины векторов $\overline{a} = \{1; 1; \alpha\}$ и $\overline{b} = \{\alpha; 8; -3\}$, если известно, что они перпендикулярны.

40. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c. Найдите сумму $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.

41. Даны точки $A(a; 3; -1)$ и $B(1; 5; -2)$. При каком значении a косинус угла, образованного вектором $\overline{AB}$ с осью Ox, равен $\frac{2}{3}$?

42. Найдите угол между векторами $\overline{a} = 2\overline{n} - \overline{m}$, $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$, если известно, что $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$, $\angle(\overline{m}, \overline{n}) = \frac{\pi}{3}$.

43. Точки $A(1; -2; 2)$, $B(-2; -1; 3)$ — вершины треугольника ABC. Найдите координаты третьей вершины C, если она лежит на оси Oy, а угол треугольника при вершине A равен $\frac{\pi}{2}$.

44. ▲ Вычислите координаты вектора $\overline{c}$, перпендикулярного векторам $\overline{a} = \{2; 3; -1\}$, $\overline{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяющего условию $\overline{c}(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) + 6 = 0$.

45. ▲ Найдите проекцию вектора $\overline{AB}$ на направление вектора $\overline{c} = 3\overline{i} - 4\overline{j} - 12\overline{k}$, если $A(1; 2; -1)$, $B(3; -4; 3)$.

46. Найдите проекцию вектора $\overline{a} - \overline{c}$ на направление вектора $\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a} = \{2; 3; 7\}$, $\overline{b} = \{4; -3; 1\}$.

47. Найдите проекцию вектора $\overline{AB}$ на направление вектора $\overline{a} = \{1; 2; 3\}$, если $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; -3)$.

48. ▲ Найдите проекцию вектора $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{k}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

49. Разложите вектор $\overline{a} = \{5; -4\}$ по двум векторам $\overline{a}_1 = \{1; 2\}$ и $\overline{a}_2 = \{-2; 3\}$.

Глава VIII

Планиметрия

Основные формулы

Пусть a, b, c — длины сторон ΔABC; A, B, C — противоположные этим сторонам вершины; $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей; S — площадь ΔABC. Тогда справедливы следующие формулы:

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (1)$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \quad (2)$$

Формула для вычисления площади ΔABC:

$$S = \frac{1}{2}ah, \quad (3)$$

где h — длина высоты, опущенной на сторону BC;

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C; \quad (4)$$

$$S = \frac{1}{2}rp; \quad (5)$$

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad (6)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона).} \quad (7)$$

Пусть R — радиус круга, S — площадь круга, L — длина окружности. Тогда

$$S = \pi R^2; \quad (8)$$

$$L = 2\pi R. \quad (9)$$

§ 1. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что:

▲ а) $CM = \frac{1}{2}|AC - BC|$, если C принадлежит отрезку AB;

▲ б) $CM = \frac{1}{2}|AC + BC|$, если C принадлежит прямой AB, но не принадлежит отрезку AB.

2. ● В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Докажите, что: а) центр окружности O лежит на биссектрисе угла; б) $AB = AC$; в) $\Delta OAB = \Delta OBC$.

3. ▲ В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина диагонали AC равна длине стороны AD. Докажите, что $BC < BD$.

4. ● Докажите, что в трапеции, диагонали которой служат биссектрисами углов при одном из оснований, длины трех сторон равны.

5. ▲ Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

6. ▲ Пусть a и b ($a > b$) —длины оснований трапеции. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям, а его длина равна $\frac{1}{2}(a - b)$.

7. ▲ В параллелограмме проведены биссектрисы его внутренних углов. Докажите, что точки пересечения биссектрис являются вершинами прямоугольника, длина диагонали которого равна разности длин соседних сторон.

8. ▲ В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны CB, точка N — середина стороны CD. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

9. ▲ Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

10. ▲ Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная ее основаниям. Докажите, что точка O делит пополам отрезок, отсекаемый от прямой боковыми сторонами трапеции.

11. ▲ Докажите, что сумма расстояний от любой точки, принадлежащей правильному треугольнику, до его сторон равна длине его высоты.

12. ▲ Пусть p — полупериметр, S — площадь треугольника, r — радиус вписанной окружности. Докажите, что $r = \frac{S}{p}$.

13. ▲ Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, S — его площадь, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $R = \frac{abc}{4S}$.

14. ▲ Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

15. ▲ Через точку A, лежащую вне круга, проведены две прямые, одна из которых касается окружности, служащей границей круга, в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D, причем точка C лежит между точками A и D. Докажите, что $AD \cdot AC = AB^2$.

16. ▲ Докажите, что любая точка выпуклого четырехугольника принадлежит хотя бы одному из кругов, диаметрами которых являются стороны четырехугольника.

17. ● В окружность вписан четырехугольник $MNPQ$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке F. Прямая, проходящая через точку F и середину стороны NP, пересекает сторону MQ в точке H. Докажите, что FH — высота треугольника MFQ.

18. ▲ На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Докажите, что $DF = 2BP$, где BP — медиана треугольника ABC.

19. ● На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ построены квадраты (вне ее). Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

20. ▲ Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, d_1 и d_2 — длины его диагоналей. Докажите, что $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

21. Докажите, что если высота и медиана, проведенные из общей вершины треугольника, делят этот угол на три равные части, то такой угол — прямой.

22. Докажите, что в четырехугольнике, описанном около окружности, суммы длин противоположных сторон равны.

§ 2. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

1. ● Через точку A, расположенную внутри угла, проведите прямую так, чтобы точка A была серединой отрезка, отсекаемого от прямой сторонами угла.

2. ● Постройте треугольник, если даны две стороны и медиана, выходящие из общей вершины.

3. ▲ Точки A и B принадлежат одной из полуплоскостей, на которые плоскость делится прямой p. На прямой p найдите точку, сумма расстояний от которой до точек A и B является наименьшей.

4. ▲ Постройте биссектрису угла, вершина которого расположена за пределами листа бумаги.

5. ● Внутри угла ABC с недоступной вершиной B дана точка D. Постройте прямую BD.

6. ● Постройте треугольник по его медианам.

7. Даны отрезки длиной a и b. Постройте отрезки, длины которых равны: ● а) $\sqrt{ab}$; ● б) $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$; ● в) $\sqrt{a^2 - 2ab + 4b^2}$.

8. ● Постройте треугольник, зная его периметр и два угла.

9. ● Впишите в данный круг треугольник, подобный данному треугольнику.

10. Даны окружность с центром в точке O и точка A, расположенная вне круга, ограниченного этой окружностью.

● а) Постройте касательную к окружности, проходящую через точку A.

● б) Через точку A проведите прямую, пересекающую окружность в точках B и C так, чтобы $AC = 2AB$ (точка B лежит между A и C).

11. ● Постройте три касающиеся друг друга внешним образом окружности с центрами в вершинах данного треугольника.

12. Точки A и B принадлежат одной из полуплоскостей, на которые плоскость делится прямой p.

▲ а) Постройте окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся прямой p.

● б) Найдите точку $C \in p$ такую, чтобы угол ABC был наибольшим.

13. ● Через данную точку плоскости, расположенную вне данного угла, проведите прямую, отсекающую от угла треугольник заданного периметра.

§ 3. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

1. В треугольнике ABC известно, что $AB = c = 13$ см, $BC = a = 14$ см, $AC = b = 15$ см. Определите: ● а) величину наибольшего внутреннего угла треугольника; ● б) площадь S; в) длину h_b высоты BD; ● г) длину r радиуса вписанной окружности; ● д) длину R радиуса описанной окружности; ▲ е) длину l_b биссектрисы BE угла B ($E \in AC$); ▲ ж) длину m_b медианы BF; ▲ з) расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей; ▲ и) расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности.

2. Определите площадь треугольника, если его основание равно a, углы при основании равны 30° и 45°.

3. В треугольнике известны длины двух сторон: 6 и 3 см. Найдите длину третьей стороны, если полусумма длин высот, опущенных на данные стороны, равна длине третьей высоты.

4. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 м больше другого. Определите длину гипотенузы.

5. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, O — точка пересечения высот. Найдите $\angle ABC$, если $OB = AC$.

6. В равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной, равной a, вписана окружность. Найдите ее радиус.

7. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки длиной 5 и 3 см, считая от вершины. Определите длины сторон треугольника.

8. Вписанная окружность касается гипотенузы прямоугольного треугольника в точке, делящей гипотенузу на отрезки, длины которых равны 2 и 3. Найдите радиус окружности.

9. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20 дм. Определите расстояние от центра вписанного круга до высоты, опущенной на гипотенузу.

10. Определите углы равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот принадлежит вписанной окружности.

11. В треугольник вписана окружность радиуса 4 см. Одна из сторон треугольника делится точкой касания на отрезки длиной 6 и 8 см. Найдите длины других сторон треугольника.

12. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание равно 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от него два малых прямоугольных треугольника. Найдите длины сторон этих треугольников.

13. Из центра окружности, вписанной в треугольник со сторонами 13, 14 и 15, проведена другая окружность радиуса 5. Найдите длины хорд, отсекаемых этой окружностью на сторонах треугольника.

14. ▲ Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанного круга равен r, а радиус вневписанного круга, касающегося гипотенузы и продолжений катетов, равен R.

15. В прямоугольном треугольнике длины катетов равны 75 и 100 дм. Основание высоты, проведенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка, на которых построены полукруги по одну сторону с данным треугольником. Определите длины отрезков катетов, заключенных внутри этих кругов.

16. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $AM : MB = 1 : 1$. Найдите CM, если $AC = 6$, $BC = 4$, $\angle ACB = 120°$.

17. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части длиной 15 и 6 см. Определите длины сторон треугольника.

18. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$ см, BD — медиана, $BD = 1$ см, $\angle BDA = 30°$. Найдите площадь треугольника ABC.

19. ▲ Найдите площадь такого треугольника, сторонами которого служат медианы треугольника с площадью, равной S.

20. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

21. В треугольнике ABC дано: $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle BAC = 120°$. Найдите длину биссектрисы BD, а также отрезков AD и CD.

22. В треугольнике ABC известно, что $\angle B : \angle C = 1 : 3$, биссектриса угла BAC делит площадь треугольника в отношении $2 : 1$. Найдите величины углов треугольника.

23. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B; $AC = b$, $AB = c$. Найдите BC.

24. В прямоугольном треугольнике ABC длина высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равна a и длина биссектрисы этого же угла равна b. Найдите площадь треугольника ABC.

25. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, медиана AD и биссектриса CE взаимно перпендикулярны. Определите величину угла ADB.

26. В треугольнике ABC дано: $AC = 13$ см, $AB + BC = 22$ см, $\angle ABC = 60°$. Найдите длины сторон AB и BC.

27. В треугольник вписан параллелограмм, длины сторон которого равны 3 и 4 см, а длина одной из диагоналей — 4 см. Найдите длины сторон треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон принадлежит основанию треугольника.

28. В параллелограмме с длинами сторон a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения биссектрис.

29. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники и их вершины последовательно соединены. Определите отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.

30. Определите площадь равнобочной трапеции, у которой длины оснований равны 10 и 26 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

31. Один из углов трапеции равен 30°, а продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом. Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований равно 8 см.

32. ● Определите длину высоты трапеции, если ее основания $a = 28$ см и $b = 16$ см, а боковые стороны $c = 25$ см и $d = 17$ см.

33. ● Найдите площадь трапеции, у которой длины оснований равны a и b ($a > b$), а острые углы между бóльшим основанием и боковыми сторонами равны α и β.

34. Около круга радиуса 2 см описана равнобочная трапеция с площадью 20 см^2. Найдите длины сторон трапеции.

35. ● Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD равен 60°. Определите площадь четырехугольника $ABEK$.

36. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 4 и 8 см, Найдите длину средней линии трапеции.

37. ▲ Длины оснований равнобочной трапеции равны 21 и 9 см, а длина высоты равна 8 см. Определите радиус окружности, описанной около трапеции.

38. ● Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

39. ▲ Длины оснований трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего боковые стороны трапеции, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам.

40. ▲ В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дано: $AD = a$, $BC = b$, O — точка пересечения диагоналей. Найдите отношение площади трапеции к площади треугольника AOD.

41. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

42. ● Радиус сектора равен R, а радиус окружности, вписанной в этот сектор, равен r. Вычислите площадь сектора.

43. Даны две непересекающиеся окружности радиусов R и $2R$. К ним проведены общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Расстояние между центрами окружностей равно $2R\sqrt{3}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных, заключенными между точками касания, и бо́льшими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

44. Биссектриса AE угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найдите отношение периметров треугольников ECD и ABE.

45. В полукруг радиуса R вписаны два круга, касающиеся друг друга, полукруга и его диаметра. Величина радиуса одного из них равна r. Найдите радиус другого круга.

46. ▲ Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найдите отношение площадей треугольников PQM и PQN, если $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$.

47. ▲ Две окружности радиусов $\sqrt{2}$ и 1 см пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 2 см. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке B и делится этой точкой пополам. Найдите длину хорды AC.

48. ▲ Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются под прямым углом, сумма их длин равна 6 см. Каково наибольшее возможное значение площади этого четырехугольника?

49. ● При каком значении длины высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 4 см имеет наибольшую площадь?

50. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен α, а длина боковой стороны равна a. Точка D расположена на высоте BM и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками отрезка BM сумму квадратов расстояний до точек A, B и C. Найдите длину отрезка MD.

51. Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма будет наибольшей?

52. ▲ Определите стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из одного угла, делят этот угол на три равные части, а длина медианы равна 10.

53. ▲ Сторона, высота и биссектриса треугольника, выходящие из одной и той же вершины, равны соответственно 5, $2\sqrt{6}$, 5. Найдите длины двух других сторон.

54. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ. Найдите отношение радиуса описанной около треугольника окружности к радиусу вписанной в него окружности.

55. В треугольнике известны стороны $a = 5$, $b = 8$ и угол между ними, равный $\frac{\pi}{3}$. Найдите длину высоты, проведенной к третьей стороне.

56. ▲ Окружность проходит через вершину B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), касается основания AC в точке A и пересекает боковую сторону BC в точке D. Определите величины углов треугольника, если $\sqrt{2}\,BD = CD$.

57. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса r. Найдите стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $\frac{4}{3}r$.

58. ▲ Две окружности с радиусами R и r внешне касаются. Отрезок AB касается этих окружностей в точках A и B. Найдите длину AB.

59. ▲ Окружности, радиусы которых равны R и r, внешне касаются. Отрезок AB касается этих окружностей в точках A и B. Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник, образованный дугами окружностей и отрезком AB.

60. ▲ Отрезки OA и OB длиной R лежат на осях Ox и Oy. Проведены дуга AB окружности с радиусом R и центром O и дуга OC окружности с радиусом R и центром A, причем C — точка пересечения этих дуг. Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник, образованный отрезком OB и дугами OC и BC.

61. ▲ Три окружности радиуса R касаются между собой в точках A, B и C. Найдите площадь криволинейного треугольника ABC, ограниченного дугами AB, AC, BC этих окружностей.

62. ▲ Три окружности, радиусы которых равны 3, 4 и 5, внешне касаются между собой в точках A, B и C. Найдите площадь криволинейного треугольника ABC, ограниченного дугами AB, BC и CA этих окружностей.

63. ▲ В треугольнике ABC точка M делит сторону AC в отношении $AM : MC = 3 : 1$, а точка N делит сторону BC в отношении $BN : NC = 3 : 2$, F — точка пересечения отрезков AN и BM. Найдите: а) отношение площади S_1 треугольника ABF к площади S треугольника ABC; б) отношение площади S_1 треугольника ABF к площади S_2 треугольника BFN.

64. ▲ Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M. Длина отрезка MB равна 3, угол при вершине B равен $\arccos \frac{2}{3}$. Отрезок прямой MC перпендикулярен стороне AB. Найдите длины сторон треугольника.

Глава IX

Стереометрия

Основные формулы

Площади поверхностей

Связь между площадью S плоской фигуры и площадью ее проекции S_1 на другую плоскость:

$$S_1 = S\cos\alpha, \tag{1}$$

где α — угол между плоскостями.

Площадь боковой поверхности призмы:

$$S = Pl, \tag{2}$$

где P — длина периметра перпендикулярного сечения, l — длина образующей призмы.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$$S = \frac{1}{2}Ph, \tag{3}$$

где P — длина периметра основания, h — апофема боковой грани.

Площади боковой и полной поверхностей прямого кругового цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh,\ S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + h), \tag{4}$$

где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Площади боковой и полной поверхностей прямого кругового конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl,\ S_{\text{полн}} = \pi R(R + l), \tag{5}$$

где R — радиус основания, l — образующая конуса.

Площадь поверхности прямого кругового усеченного конуса:

$$S = \pi(R + r)l, \tag{6}$$

где R и r — радиусы оснований, l — образующая усеченного конуса.

Площадь поверхности вращения отрезка AB вокруг оси l, не пересекающей отрезок (рис. 8):

$$S = 2\pi Rra, \tag{7}$$

где a — длина отрезка, r — расстояние от середины отрезка до оси вращения.

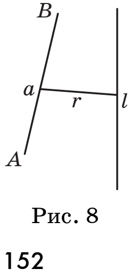


Рис. 8

Площадь поверхности вращения дуги AB окружности вокруг оси l, на которой лежит центр O окружности (рис. 9):

$$S = 2\pi Rh, \qquad (8)$$

где R — радиус окружности, $h = A_1B_1$ — длина проекции дуги AB на ось вращения.

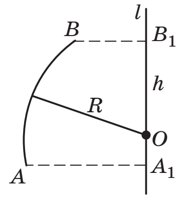


Рис. 9

Площадь поверхности шара (площадь сферы):

$$S = 4\pi R^2, \qquad (9)$$

где R — радиус шара.

Объемы тел

Объем прямоугольного параллелепипеда:

$$V = abc, \qquad (10)$$

где a, b, c — длины его сторон.

Объем прямой призмы:

$$V = Sh, \qquad (11)$$

где S — площадь многоугольника, лежащего в основании призмы, h — высота призмы.

Объем наклонной призмы:

$$V = Sl, \qquad (12)$$

где S — площадь перпендикулярного сечения призмы, l — длина бокового ребра призмы.

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}Sh, \qquad (13)$$

где S — площадь многоугольника, лежащего в основании пирамиды, h — высота пирамиды.

Объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}(S + s + \sqrt{Ss})h, \qquad (14)$$

где S и s — площади ее оснований, h — высота усеченной пирамиды.

Объем прямого кругового цилиндра:

$$V = \pi R^2 h, \qquad (15)$$

где R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Объем прямого кругового конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \qquad (16)$$

где R — радиус основания, h — высота конуса.

Объем прямого кругового усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)h, \qquad (17)$$

где R и r — радиусы оснований, h — высота усеченного конуса.

Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad (18)$$

где R — радиус шара.

§ 1. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ. МНОГОГРАННИКИ

1. Два прямоугольных треугольника лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют общую гипотенузу. Найдите расстояние между вершинами прямых углов этих треугольников, если длины их катетов равны 4 и 3 см.

2. ▲ Из точки ребра двугранного угла, величина которого равна φ, в одной из его граней проведен отрезок, составляющий с указанным ребром угол ψ. Какой угол образует этот отрезок с плоскостью другой грани?

3. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника принадлежат различным граням острого двугранного угла и образуют с ребром этого двугранного угла соответственно острые углы φ и ψ. Определите величину двугранного угла.

4. ● Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ удалены от плоскости γ на расстояние $8l$ каждая, а середина M стороны CD принадлежит плоскости γ. Диагонали AC и BD прямоугольника пересекаются в точке O. Определите расстояние от центра описанной около треугольника AOB окружности до плоскости γ, если $\angle ADB = \varphi$.

5. Вершины A и B правильного треугольника ABC удалены от некоторой плоскости β на расстояние, равное h, а точка C — на расстояние, равное m ($h > m$). На каком расстоянии от плоскости β находится центр вписанного в треугольник ABC круга?

6. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол величиной α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна S.

7. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найдите высоту параллелепипеда, если его объем равен V.

8. Основания параллелепипеда — квадраты со стороной b, а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

9. ▲ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — центр грани ABB_1A_1. Определите величину угла между прямыми MD и CN.

10. ▲ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите величину угла между плоскостями BCB_1 и BC_1M, где M — середина ребра AD.

11. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

12. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная l, составляет угол β с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

13. Равнобедренный треугольник с углом α при вершине и периметром, равным p, служит основанием прямой призмы. Угол между диагоналями равных боковых граней призмы, проведенными из одной вершины, равен β. Найдите объем призмы.

14. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы и противоположную вершину верхнего проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна S. Найдите объем отсеченной пирамиды.

15. ● Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $BB_1 = 2AC$. Точки E и F — центры граней AA_1B_1B и CC_1B_1B, точка P — центр основания ABC, точка Q — середина ребра CC_1. Определите величину угла между прямыми EF и PQ.

16. ● Стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой, проходящей через точки C_1 и B, а вершины P и Q — на прямой A_1C. Найдите объем призмы.

17. ▲ Длина стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а высота — $4\sqrt{3}$. Вершина правильного тетраэдра принадлежит отрезку, соединяющему центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью грани ABC призмы, а плоскость одной из его боковых граней проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найдите длину ребра тетраэдра.

18. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами ребер AC и A_1B_1. Проекция отрезка MN на прямую BA_1 равна $\frac{a}{2\sqrt{6}}$. Определите высоту призмы.

19. Длина каждого ребра тетраэдра $SABC$ равна a. Найдите расстояние между SA и BC.

20. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны основания на расстояние k.

21. Угол между высотой и апофемой правильной треугольной пирамиды равен α, длина бокового ребра пирамиды равна l. Найдите объем пирамиды.

22. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковую грань опущен перпендикуляр, равный b. Найдите объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

23. Найдите полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α наклона боковой грани к плоскости основания.

24. ● В основании треугольной пирамиды, все боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом α, лежит правильный треугольник, длина стороны которого равна a. Определите объем пирамиды.

25. ● Основаниями усеченной треугольной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ являются правильные треугольники, длины сторон которых равны a и b ($a > b$). Боковые грани наклонены к плоскости нижнего основания под углом α. Найдите объем многогранника AB_1C_1CB.

26. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник, длина стороны которого равна a. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Боковая грань SBC наклонена к плоскости основания под углом φ. Определите площадь боковой поверхности пирамиды, если за ее основание принята одна из боковых граней.

27. Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SA. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{2}{3}$. Найдите косинус угла между боковыми гранями.

28. ● Отрезок, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

29. а) В трехгранном угле $SABC$ известно, что $\angle ASB = \beta$, $\angle ASC = \gamma$, $\angle BSC = \alpha$. Величина двугранного угла при ребре AS равна A. Докажите, что $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$ (теорема косинусов для трехгранного угла).

▲ б) Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если величина двугранного угла между боковой гранью и основанием равна φ.

30. Длина высоты правильной треугольной пирамиды равна h, а величина двугранного угла, образованного боковыми гранями, равна 2φ. Определите объем пирамиды.

31. ▲ Треугольная пирамида рассечена плоскостью на два многогранника. Найдите отношение объемов этих многогранников, если известно, что секущая плоскость делит три ребра, сходящиеся в одной вершине пирамиды, в отношениях $1 : 2$, $1 : 2$ и $2 : 1$, считая от вершины.

32. ● Объем правильной треугольной пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема куба, длина ребра которого равна длине бокового ребра пирамиды. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

33. Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a и наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

34. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между боковым ребром SA и диагональю основания BD.

35. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой сторона основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

36. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, длина бокового ребра которой равна l, а величина двугранного угла, образованного двумя противоположными гранями, равна β.

37. В правильной четырехугольной пирамиде длина стороны основания равна a, величина плоского угла при вершине равна углу наклона бокового ребра к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

38. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$, диагональ AC которого имеет длину, равную a. Прямая DM составляет с плоскостью основания пирамиды угол величиной α и $DM = k$. Найдите площадь полной поверхности куба, объем которого равен объему данной пирамиды, если известно, что угол между прямыми DM и MB равен γ и $\angle MBC = \angle ABM$.

39. Основанием пирамиды служит ромб, длины диагоналей которого равны 6 и 8 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и имеет длину, равную 1 м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

40. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат. Ребро SA перпендикулярно основанию. Площадь основания в m раз меньше площади боковой поверхности. Найдите углы наклона граней SCD и SBC к плоскости основания.

41. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S является ромб, а высота пирамиды SO проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Вычислите величину двугранного угла, образованного боковой гранью SAB и основанием пирамиды, если $\angle ASO = \alpha$ и $\angle BSO = \beta$.

42. ● Величина двугранного угла при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равна α. Определите величину угла между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания.

43. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром SA и плоскостью грани SBC. Определите величину этого угла.

44. ▲ Через точку S, лежащую вне сферы радиуса 4, проведены четыре прямые, пересекающие сферу. Точки пересечения прямых со сферой являются границами отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, причем точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на отрезках AS, BS, CS, DS соответственно. Известно, что длины отрезков AS, BS, CS, DS равны 8, а длина отрезка AA_1 равна 2. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $SABCD$.

45. Через точку S, лежащую вне сферы радиуса 6, проведены три прямые, пересекающие сферу. Точки пересечения прямых со сферой являются границами отрезков AA_1, BB_1, CC_1, причем точки A_1, B_1, C_1 лежат на отрезках AS, BS, CS соответственно. Известно, что $SA : SA_1 = 4 : 3$, а длина отрезка AA_1 равна 3. Найдите расстояние между центрами данной сферы и сферы, описанной около пирамиды $SABC$, если длины отрезков BS и CS равны 12.

46. Через точку S, удаленную от центра сферы радиуса 3 на расстояние 9, проведено пять прямых, пересекающих сферу. Точки пересечения прямых со сферой являются границами отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 причем точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 лежат на отрезках AS, BS, CS, DS, ES соответственно. Известно, что длины отрезков AS, BS, CS, DS, ES равны $6\sqrt{3}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $SABCDE$.

47. Через точку S, лежащую вне сферы с центром в точке O, проведены три прямые, пересекающие сферу и образующие с прямой SO углы, равные $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{8}$. Точки пересечения прямых со сферой являются границами отрезков AA_1, BB_1, CC_1, причем точки A_1, B_1, C_1 лежат на отрезках AS, BS, CS соответственно. Известно, что длина отрезка SO в 4 раза больше радиуса сферы. Найдите отношение радиуса данной сферы к радиусу сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

48. ▲ В правильной треугольной пирамиде отношение радиусов вписанной и описанной сфер равно $\frac{1}{3}$. Найдите объем пирамиды, если длина ее высоты равна h.

49. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найдите объем пирамиды, если длина ее бокового ребра равна l.

50. В правильной треугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра ее основания равна a.

51. Для правильной четырехугольной пирамиды отношение радиусов вписанной и описанной сфер равно ($\sqrt{2}-1$). Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если длина ее апофемы равна p.

52. ▲ В основании треугольной пирамиды $PABC$ с высотой $\frac{\sqrt{30}}{3}$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 8. Проекцией вершины P на основание пирамиды является середина ребра AB. Через вершину P проводятся сечения пирамиды плоскостями, параллельными ребру AB. Найдите наибольшее возможное значение площади сечения.

53. В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, а проекцией вершины P на основание пирамиды является середина гипотенузы AB. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. Через вершину S параллельно гипотенузе AB проведена плоскость так, что площадь полученного сечения имеет максимально возможное значение. Найдите отношение, в котором эта плоскость делит объем пирамиды.

54. В основании треугольной пирамиды $PABC$ с высотой $\sqrt{7}$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетом, равным 16. Проекцией вершины P на основание пирамиды является середина гипотенузы AB. Через вершину S проводятся сечения пирамиды плоскостями, параллельными гипотенузе AB. Найдите наибольшее возможное значение площади сечения.

55. В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит правильный треугольник ABC, а проекцией вершины P на основание является середина ребра AB. Наибольшее боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{12}$. Через вершину P параллельно ребру AB проведена плоскость так, что площадь полученного сечения имеет максимально возможное значение. Найдите отношение, в котором эта плоскость делит объем пирамиды.

56. ▲ Отношение радиуса сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, к радиусу сферы, вписанной в эту пирамиду, принимает наименьшее возможное значение. Найдите величину угла наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды.

57. Отношение радиуса сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, к радиусу сферы, описанной около этой пирамиды, принимает наибольшее возможное значение. Найдите величину угла при вершине пирамиды.

58. Отношение радиуса сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, к радиусу сферы, вписанной в эту пирамиду, принимает наименьшее возможное значение. Найдите величину угла, под которым из центра описанной сферы видна апофема пирамиды.

59. Отношение радиуса сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, к радиусу сферы, описанной около этой пирамиды, принимает наибольшее возможное значение. Найдите величину угла при основании боковой грани пирамиды.

60. ▲ На боковом ребре PA треугольной пирамиды $PABC$ взята точка M так, что $MA : MP = 2 : 1$. Плоскость, проходящая через точку M параллельно ребру AB, пересекает ребро AC в точке L и делит пирамиду на части, объемы которых относятся как $5 : 4$. Найдите отношение $LC : LA$.

61. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AC = 6$, $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$ и AN — биссектриса угла CAC_1?

62. ● В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину S параллельно ребру AB и составляющего с плоскостью основания угол γ.

63. ● Длина апофемы боковой грани правильной треугольной пирамиды равна k. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех ее вершин. Найдите площадь полученного сечения, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью ее основания угол β.

64. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды равна l, а величина угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равна β. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех ее вершин. Определите площадь полученного сечения.

65. ● В правильной четырехугольной пирамиде длина стороны основания равна a, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно боковому ребру, выходящему из противоположной вершины основания. Найдите площадь сечения.

66. В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань наклонена к основанию под углом α. Радиус вписанной в пирамиду сферы равен r. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через центр вписанного шара параллельно основанию пирамиды.

67. В конус с высотой H и радиусом основания R вписана правильная шестиугольная призма так, что одно ее основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат боковой поверхности конуса. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

68. Угол между боковым ребром и высотой правильной треугольной пирамиды равен φ. В пирамиду вписан цилиндр, радиус основания и высота которого имеют длину r. Одно из оснований цилиндра имеет по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды, а другое лежит в плоскости ее основания. При каком значении φ объем пирамиды наименьший?

69. ▲ В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через вершину основания и высоту пирамиды. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания, если отношение площади сечения к площади основания равно $\frac{1}{3}$.

70. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через высоту и апофему пирамиды. Найдите угол наклона апофемы к плоскости основания, если отношение площади сечения к площади основания равно $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

71. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через вершину основания и высоту пирамиды. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания, если площадь сечения равна площади основания.

72. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через боковое ребро и высоту пирамиды. Найдите угол наклона апофемы пирамиды к плоскости основания, если площадь основания в 2 раза больше площади сечения.

73. ▲ Плоскость, проведенная на одинаковых расстояниях от всех пяти вершин правильной четырехугольной пирамиды, делит ее полную поверхность на две части, отношение площадей которых равно простому числу. Найдите объем пирамиды, если длина стороны ее основания равна a.

74. Плоскость, проведенная на одинаковых расстояниях от всех пяти вершин правильной четырехугольной пирамиды, делит ее полную поверхность на две части, отношение площадей которых равно четному числу, не делящемуся на 4. Найдите объем пирамиды, если длина ее бокового ребра равна b.

75. Плоскость, проведенная на одинаковых расстояниях от всех пяти вершин правильной четырехугольной пирамиды, делит ее полную поверхность на две части, отношение площадей которых равно числу, являющемуся натуральной степенью числа 2. Найдите объем пирамиды, если длина ее высоты равна 4.

76. Плоскость, проведенная на одинаковых расстояниях от всех пяти вершин правильной четырехугольной пирамиды, делит ее полную поверхность на две части, отношение площадей которых равно составному числу. Найдите объем пирамиды, если длина ее апофемы равна H.

77. ▲ Основанием треугольной пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90°$, $AB = 5$, $BC = 12$. Боковое ребро DC равно 9 и перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

78. Основанием треугольной пирамиды $DKLM$ является прямоугольный треугольник KLM, в котором $\angle KLM = 90°$, $KL = 15$, $KM = 17$. Боковое ребро DM перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если $\angle DLM = 60°$.

79. Основанием треугольной пирамиды $DPQR$ является прямоугольный треугольник PQR, в котором $\angle PQR = 90°$, $PQ = 9$, $QR = 12$. Боковое ребро DR перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $\angle DPR = 45°$.

80. Основанием треугольной пирамиды $PFKD$ является прямоугольный треугольник FKD, в котором $\angle FKD = 90°$, $FD = 20$, $\angle FDK = 30°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если известно, что боковое ребро PD равно 10 и перпендикулярно плоскости основания пирамиды.

81. ▲ В правильной треугольной пирамиде сумма длин всех шести ее ребер равна L, а площадь основания равна S_0. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. Решите задачу при $S_0 = \sqrt{3}$ и $L = 10$.

82. В правильной треугольной пирамиде длина бокового ребра равна b, а радиус круга, вписанного в основание пирамиды, равен r. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. Решите задачу при $b = \sqrt{7}$ и $r = 1$.

83. В правильной треугольной пирамиде сумма длин всех шести ее ребер равна L, а радиус круга, вписанного в основание пирамиды, равен r. Найдите объем пирамиды. Решите задачу при $L = 36$ и $r = \sqrt{3}$.

84. В правильной треугольной пирамиде площадь полной поверхности равна S, а радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен R. Найдите объем пирамиды. Решите задачу при $S = 9\sqrt{3}$ и $R = 2$.

§ 2. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant y(x)$, где $y(x)$ — непрерывная однозначная функция, выражается формулой

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx.$$

В более общем случае объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$ где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx.$$

Если на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то площадь P поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг оси Ox, находится по формуле

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

1. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна a и составляет угол α с основанием. Найдите объем цилиндра.

2. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α к плоскости основания, пересекает верхнее основание по хорде длиной b, стягивающей дугу в β. Найдите объем цилиндра.

3. Площадь полной поверхности конуса равна S, угол при вершине осевого сечения равен α. Найдите объем конуса.

4. В основание конуса вписан правильный треугольник, длина стороны которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и сторону треугольника, образует в сечении с поверхностью конуса правильный треугольник. Найдите объем конуса.

5. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает его основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определите отношение объемов образовавшихся частей конуса.

6. Через вершину конуса проведено сечение под углом β к плоскости основания. Плоскость сечения удалена от центра основания конуса на расстояние a. Определите полную поверхность конуса, если величина наибольшего угла между образующими конуса равна α.

7. Треугольник вращается вокруг стороны, длина которой равна a. Определите объем тела вращения, если величины прилежащих углов равны α и β.

8. Два равнобедренных треугольника ABC и ADC расположены по одну сторону от общего основания AC, равного b. Определите объем тела, образованного вращением фигуры $ABCDA$ вокруг основания AC, если $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ $(\alpha > \beta)$.

9. Длина меньшей стороны параллелограмма равна a, острый угол параллелограмма равен α, угол между меньшей диагональю и большей стороной равен β. Найдите объем тела, полученного вращением параллелограмма вокруг его большей стороны.

10. Фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y^2 = x$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислите объем полученного тела.

11. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями $y^2 = x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$.

12. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнением:

▲ а) $y = ||x - 1| - 2|$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

▲ б) $y = |x - 1| - |x + 1|$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$;

в) $y = x|x - 2|$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

г) $y = x^2 - 3|x| + 2$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$;

д) $y = \sqrt{1 - x}$, $x = -3$, $x = 1$, $y = 0$.

13. ● Квадрат вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и проходящей только через одну из его вершин. При каком положении квадрата относительно оси объем полученного тела вращения будет наибольшим?

14. ● В конус с высотой H и радиусом основания R вписан цилиндр так, что одно его основание лежит в плоскости основания конуса, а окружность другого основания принадлежит боковой поверхности конуса. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

15. ● Найдите радиус основания r и высоту h прямого кругового конуса, вписанного в шар радиуса R так, чтобы объем конуса был наибольшим.

16. ▲ Найдите конус наименьшего объема, описанный около шара радиуса R.

17. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R (центр основания конуса совпадает с центром шара).

18. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида так, что все ее вершины принадлежат сфере. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

§ 3. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

1. Объем правильной треугольной призмы равен V. Через вершину основания параллельно противоположному ребру этого основания под углом α к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду объемом W. Определите высоту призмы, если $V > 3W$.

2. Куб с ребром, равным a, вписан в правильную четырехугольную пирамиду так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах, а четыре другие — на основании пирамиды. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Определите объем пирамиды.

3. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC такой, что $AB = AC = a$, $\angle ABC = \varphi$. Прямая AS составляет с плоскостью основания пирамиды угол величиной α, плоскость боковой грани BSC составляет с той же плоскостью угол величиной β и $\angle SAC = \angle SAB$. Найдите объем пирамиды $KSLC$, если известно, что точки K и L принадлежат ребрам AS и BS соответственно, а площади треугольников KSL и ABS относятся как $4 : 25$.

4. В правильную четырехугольную пирамиду с плоским углом α при вершине вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковых граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если известно, что высота цилиндра в 2 раза меньше высоты пирамиды, а радиус основания равен r.

5. Определите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра пирамиды равна l, а боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α.

6. Найдите объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду с боковым ребром l и плоским углом α при вершине.

7. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан усеченный конус. Определите боковую поверхность этого конуса, если апофема боковой грани пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r.

8. Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем конуса.

9. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Бóльшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол, величина которого равна α. Найдите величину острого угла ромба.

10. В прямоугольном параллелепипеде длина бокового ребра равна c, а длины сторон прямоугольника, лежащего в основании, равны a и b. Через одну из вершин верхнего основания параллелепипеда и противолежащую ей вершину нижнего основания проведена плоскость, параллельная диагонали прямоугольника, лежащего в основании. Найдите радиус сферы, касающейся указанной плоскости и плоскости нижнего основания параллелепипеда в точке пересечения его диагоналей.

11. ▲ В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а длина высоты пирамиды равна h. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

12. ● В основании треугольной пирамиды, высота которой равна h, лежит прямоугольный треугольник с катетом, равным a, и острым углом α, прилежащим к этому катету. Вершина пирамиды проецируется в вершину прямого угла треугольника. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

13. Определите объем шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α.

14. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Определите объем пирамиды, если радиус описанного шара равен R. Центр шара лежит внутри пирамиды.

15. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что объем шара, описанного около пирамиды, равен V, а перпендикуляр, опущенный из центра шара на ее боковую грань, образует с высотой пирамиды угол α. Центр шара находится внутри пирамиды.

16. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания пирамиды как 3 : 4. Найдите величину угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

17. ▲ Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB = 3$, $BC = 4$. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы. Определите величину угла между прямыми BS и CS, если радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 6,5.

18. ▲ Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны b, а угол между ними равен α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны основанию, а третья грань наклонена к нему под углом α. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

19. ● Длина высоты правильной треугольной пирамиды равна h, а радиус круга, вписанного в основание этой пирамиды, равен r. Через середины двух сторон основания и вершину пирамиды проведена секущая плоскость. Найдите радиус сферы, касающейся основания пирамиды в точке пересечения его медиан и секущей плоскости.

20. ● Длина каждого ребра тетраэдра равна 1. Найдите радиус сферы, касающейся всех плоскостей граней тетраэдра.

21. ● В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

22. ● Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду.

23. Угол между плоскостями основания и боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равен β, площадь сферы, вписанной в пирамиду, равна S. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

24. ● В правильной четырехугольной пирамиде величина каждого плоского угла при вершине равна β, а радиус шара, касающегося всех пяти плоскостей граней пирамиды, равен R. Найдите объем пирамиды.

25. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой длины сторон оснований относятся как $m : n$. Определите отношение объемов пирамиды и шара.

26. Найдите радиус шара, касающегося основания и боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен 2β.

27. Шар радиуса R вписан в конус. Из центра шара образующая конуса видна под углом α. Найдите объем конуса.

28. Сфера касается плоскости основания прямого кругового конуса в его центре. Плоскость, образующая с высотой конуса угол γ, касается указанной сферы и отсекает на окружности основания дугу с острым центральным углом α. Найдите радиус сферы, если радиус окружности основания конуса равен r.

29. Найдите отношение объема прямого кругового конуса к объему шара, вписанного в этот конус, если известно, что образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол α.

30. Найдите угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

31. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади его верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

32. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найдите отношение объемов этих тел.

33. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Апофема пирамиды, равная l, образует угол α с основанием пирамиды. В шар вписан цилиндр. Определите отношение объема пирамиды к объему цилиндра, если высота цилиндра равна удвоенному радиусу его основания.

34. ▲ В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида так, что плоскость основания пирамиды делит перпендикулярный ей радиус шара в отношении $3 : 7$, считая от центра шара. Найдите объем конуса, вписанного в пирамиду.

35. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Определите площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду.

36. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC. Радиус окружности, описанной около него, равен r, катет AC стягивает дугу, равную 2β. Через диагональ боковой грани, проходящей через другой катет BC, проведена плоскость перпендикулярно этой грани, составляющая с плоскостью основания угол β. Определите площадь сечения.

37. ● Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α, причем длина высоты призмы больше длины наибольшей диагонали основания. Под каким углом к плоскости основания следует провести секущую плоскость, чтобы в сечении призмы получился квадрат?

38. ● В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция с острым углом α, описанная около круга радиуса r. Через боковую сторону нижнего основания и противоположную вершину острого угла верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания двугранный угол величиной β. Определите площадь сечения призмы этой плоскостью.

39. ▲ В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина стороны основания $ABCD$ равна a, а длина высоты равна $2a\sqrt{2}$.

Через вершину A параллельно диагонали BD основания пирамиды проведена плоскость так, что величина угла между прямой AB и этой плоскостью равна $\frac{\pi}{6}$. Найдите площадь сечения.

40. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна a. Плоскости боковых граней образуют с плоскостью основания пирамиды угол α. На сторонах AD и BC основания взяты точки E и F так, что $AE = \frac{2a}{3}$ и $CF = \frac{a}{3}$. Через эти точки проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания пирамиды угол β. Найдите площадь полученного сечения.

41. ▲ Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем V, найдите призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

42. ▲ На ребрах A_1B_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, а длина ребра равна 5, выбраны точки M и N соответственно, причем $B_1M : MA_1 = 1 : 2$ и $DN : NA = 1 : 3$. Найдите наименьшее значение радиуса шара, имеющего центр на отрезке MN и касающегося ребра C_1D_1.

43. ▲ В правильной треугольной пирамиде $PABC$ с высотой не меньшей h, расположена полусфера радиуса $r = \sqrt{3}$ так, что ее касаются все боковые грани пирамиды, центр полусферы лежит на основании ABC пирамиды. Найдите наименьшее возможное значение объема пирамиды.

44. В основании правильной пирамиды лежит шестиугольник со стороной a. Высота пирамиды равна H. Через вершину пирамиды параллельно ребру основания проведена плоскость так, что площадь сечения имеет наибольшее возможное значение. Найдите полную поверхность четырехугольной пирамиды, отсекаемой этой плоскостью. Решите задачу при следующих данных: ▲ а) $a = \frac{11}{\sqrt{3}}$, $H = 3$; б) $a = 7$, $H = 3$; в) $a = 9\sqrt{3}$, $H = 6$.

45. ▲ В прямой круговой конус вписана правильная треугольная пирамида, апофема боковой грани которой равна k, а сама боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через одно из боковых ребер пирамиды проведена плоскость, пересекающая коническую поверхность. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значение.

46. ▲ В правильной четырехугольной пирамиде с ребром основания a боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. В пирамиде расположен конус так, что его вершина совпадает с центром основания пирамиды, а окружность основания конуса касается всех боковых граней пирамиды, причем объем конуса при этих условиях максимально возможный. Найдите радиус шара, касающегося боковой поверхности конуса и всех боковых граней пирамиды.

47. В правильной треугольной пирамиде с высотой H ребро основания равно a. В пирамиде расположен цилиндр так, что его нижнее основание лежит на плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается всех боковых граней пирамиды, причем цилиндр имеет максимально возможную при этих условиях площадь боковой поверхности. Найдите радиус сферы, на поверхности которой лежат окружность нижнего основания цилиндра и вершина пирамиды.

48. В правильной четырехугольной пирамиде с высотой H ребро основания равно a. В пирамиде расположен цилиндр так, что его нижнее основание лежит на плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается всех боковых граней пирамиды, причем цилиндр имеет максимально возможную при этих условиях площадь боковой поверхности. Найдите радиус сферы, на поверхности которой лежат окружность верхнего основания цилиндра и вершины основания пирамиды.

49. В правильной треугольной пирамиде с ребром основания a боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. В пирамиде расположен конус так, что его вершина находится в центре основания пирамиды, а окружность основания конуса касается всех боковых граней пирамиды, причем объем конуса при этих условиях максимально возможный. Найдите объем шара, касающегося боковой поверхности конуса и всех боковых граней пирамиды.

50. ▲ Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна 4, причем основание этой высоты принадлежит треугольнику ABC (включая его границу). Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение радиуса сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

51. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 8. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна 6, причем основание высоты принадлежит квадрату $ABCD$ (включая его границу). Найдите наибольшее возможное при этих условиях значение полной поверхности $SABCD$.

52. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна 3, причем основание этой высоты принадлежит треугольнику ABC (включая его границу). Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение радиуса шара, вписанного в пирамиду $SABC$.

53. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 4. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна 4, причем основание этой высоты принадлежит квадрату $ABCD$ (включая его границу). Найдите наибольшее возможное при этих условиях значение радиуса сферы, описанной около пирамиды $SABCD$.

54. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной, равной a. Через вершину пирамиды параллельно диагонали основания проведена плоскость так, что площадь полученного сечения принимает максимально возможное значение. Найдите объем отсекаемой этой плоскостью треугольной пирамиды, если высота исходной пирамиды равна H. Решите задачу при следующих данных: ▲ а) $a = 20$, $H = 3$; б) $a = 5$, $H = 1$; в) $a = 100$, $H = 7$; г) $a = 52$, $H = 5$.

55. ▲ В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с вершиной D сторона основания равна 3, а высота пирамиды равна $\sqrt{78}$. В этой пирамиде параллельно ребрам AC и DB проведена секущая плоскость так, что расстояние от вершины C до этой плоскости не превосходит 2. Найдите максимально возможное при этих условиях значение объема пирамиды, у которой основанием является сечение данной пирамиды, а вершиной — точка A.

56. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с вершиной D боковое ребро равно 7, апофема пирамиды равна $2\sqrt{10}$. В этой пирамиде параллельно ребрам AC и DB проведена секущая плоскость так, что расстояние от вершины S до этой плоскости не превосходит 4. Найдите максимально возможное при этих условиях значение объема пирамиды, у которой основанием является сечение пирамиды $DABC$, а вершиной — точка B.

57. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с вершиной S высота равна $\sqrt{73}$, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом arcsin $\sqrt{0{,}73}$. В этой пирамиде параллельно ребрам AC и DB проведена секущая плоскость так, что расстояние от вершины A до этой плоскости не превосходит 5. Найдите максимально возможное при этих условиях значение объема пирамиды, у которой основанием является сечение пирамиды $DABC$, а вершиной — точка C.

58. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с вершиной D апофема равна $4\sqrt{2}$, а плоский угол при вершине D равен arccos $\frac{7}{9}$. В этой пирамиде параллельно ребрам AC и DB проведена секущая плоскость так, что расстояние от вершины B до этой плоскости не превосходит 3. Найдите максимально возможное при этих условиях значение объема пирамиды, у которой основанием является сечение пирамиды $DABC$, а вершиной — точка D.

59. ▲ Пусть d_1, d_2, d_3 — расстояния от точки M, расположенной внутри или на границе прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, до граней AA_1B_1B, AA_1D_1D и $ABCD$ соответственно. Известно, что числа d_1, d_2, d_3 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{3}{2}$. Среди точек M, удовлетворяющих указанному свойству, выбрана точка M_0, наименее удаленная от вершины C_1. Найдите объем пирамиды M_0ABCD с вершиной в точке M_0, если $AD = AB = 4$, $AA_1 = 18$.

60. Среди точек M, расположенных внутри или на границе прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на расстоянии 3 от его основания $ABCD$, отмечены те, расстояния которых до граней AA_1B_1B, AA_1D_1D и $ABCD$ образуют арифметическую прогрессию. Пусть M_0 — та из отмеченных точек, которая наименее удалена от вершины D_1. Найдите объем пирамиды $M_0CDD_1C_1$ с вершиной в точке M_0, если $AD = 6$, $AB = 4$, $AA_1 = 5$.

61. Среди точек M, расположенных внутри или на границе прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отмечены те, расстояния которых до граней AA_1B_1B, AA_1D_1D и $ABCD$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 3. Пусть M_0 — та из отмеченных точек, которая наименее удалена от вершины B_1. Найдите объем пирамиды $M_0A_1B_1C_1D_1$ с вершиной в точке M_0, если $AD = 15$, $AB = 24$, $AA_1 = 18$.

62. Среди точек M, расположенных внутри или на границе прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, расстояния которых до граней AA_1B_1B, AA_1D_1D и $ABCD$ образуют геометрическую прогрессию, а расстояния до граней $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ равны, выбрана точка M_0, наименее удаленная от вершины D. Найдите объем пирамиды $M_0AA_1B_1B$ с вершиной в точке M_0, если $AD = 9$, $AB = 2$ и $AA_1 = 1$.

Глава X

Задачи с параметрами

§ 1. ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

1. ▲ Найдите все значения параметра a ($a \in \boldsymbol{R}$), при которых уравнение

$$4x^2 + 4x|x| - 3x = 3|x| + a - 1$$

имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра b ($b \in \boldsymbol{R}$), при которых уравнение

$$(x - |x|)(|x - |x|| - 3) + |x - |x|| = b + 3$$

имеет более одного решения.

3. ▲ Найдите все значения параметра a ($a \in \boldsymbol{R}$), при которых уравнение

$$ax^2 - (3a + 5)x + 2a + 1 = 0$$

имеет два различных корня, причем больший из них принадлежит отрезку $[-1; 3]$.

4. Найдите все значения параметра b ($b \in \boldsymbol{R}$), при которых разность между бо́льшим и меньшим корнями уравнения

$$bx^2 + (b - 11)x - 2b - 33 = 0$$

не меньше $2\sqrt{5}$.

5. Найдите все значения параметра c ($c \in \boldsymbol{R}$), при которых уравнение

$$cx^2 - (c + 5)x - 6c + 35 = 0$$

имеет два различных корня, причем меньший из них принадлежит отрезку $[-1; 8]$.

6. Найдите все значения параметра p ($p \in \boldsymbol{R}$), при которых разность между бо́льшим и меньшим корнями уравнения

$$px^2 + (p + 63)x - 6p + 210 = 0$$

не меньше 2.

7. ▲ Найдите все значения параметра, при которых данное неравенство выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$:

▲ а) $(4x-3)^2+p(4x-3)(x^2+1)+(2p+1)(x^2+1)^2>0$;

б) $(12x+5)^2-a(12x+5)(x^2+1)+(5a+11)(x^2+1)^2>0$;

в) $(6x+8)^2+2b(3x+4)(x^2+1)+2(b-1)(x^2+1)^2>0$;

г) $(10x-24)^2+2q(5x-12)(x^2+1)+(3q+11)(x^2+1)^2>0$.

8. Решите данное уравнение при всех значениях параметра:

● а) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}=a$;

● б) $\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{x^2-4x+4}=b$;

● в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=c$;

г) $px+1=\sqrt{x+4}$.

9. Решите данное неравенство при всех значениях параметра:

а) $\sqrt{2x+a}\geqslant x$;

б) $x+a\geqslant\sqrt{x-1}$;

в) $\sqrt{4x^2+2x-2}<p+2x$;

г) $\sqrt{4x^2-2x-6}>p-2x$.

10. Найдите все значения параметра, при которых данное неравенство выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$:

▲ а) $a\cdot 9^x+(1-a)\cdot 3^x-\frac{7}{4}a+1>0$;

б) $c\cdot 5^{-x}-(5c+3)\cdot 5^x+c-1<0$;

в) $(2-7b)\cdot 4^x+(1-2b)\cdot 2^x+b>0$;

г) $p\cdot 7^x+(4-8p)\cdot 7^{-x}>2p-1$.

11. Решите данное уравнение при всех значениях параметра:

а) $2^{2x}-(2+a)\cdot 2^x+2a=0$;

б) $3^{2x}+(b-3)\cdot 3^x-3b=0$;

в) $5^{2x+1}+(5c-1)\cdot 5^x-c=0$;

г) $3^{2(x+1)}-(9k+1)\cdot 3^x+k=0$.

12. Найдите все действительные значения параметра k, при которых данное уравнение имеет единственное решение:

▲ а) $\log_{\sqrt{kx+2}}\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)=2$;

б) $\log_{kx+2}\sqrt{6x-x^2-8}=\frac{1}{2}$;

в) $\log_{\sqrt{kx+2}}\sqrt{8x-3-4x^2}=1$;

г) $\log_{kx+2}(4x-3-x^2)=1$.

13. Найдите все значения параметра a, при которых данное неравенство выполняется для всех действительных значений x:

▲ а) $\log_{\frac{9-5a}{4}}\left[\dfrac{(3-a)x^2-4a+7}{x^2+4}\right] > 0$;

б) $\log_{\frac{9+4a}{16}}\left[\dfrac{(4a-5)x^2+2x+4a-5}{2(x^2+1)}\right] > 1$;

в) $\log_{\frac{a+5}{2}}\left[\dfrac{(3a+6)x^2+6a+10}{x^2+2}\right] < 1$;

г) $\log_{\frac{3a-6}{2}}\left[\dfrac{2(a-1)x^2+2a-4}{x^2+1}\right] < 0$.

14. Найдите все значения параметра, при которых данное уравнение имеет единственное решение:

▲ а) $\log_{ax-7}(16x-4x^2-15)=2$;

б) $\log_{\sqrt{bx-5}}\left(5x-x^2-\dfrac{21}{4}\right)=4$;

в) $\log_{cx-7}\sqrt{8x-x^2-15}=1$;

г) $\log_{\sqrt{dx-17}}\sqrt{24x-4x^2-35}=1$.

15. Найдите все неотрицательные значения параметра, при которых данная система имеет ровно два решения:

▲ а) $\begin{cases} x^2+y^2+x=p+2, \\ x+2y=1-p, \\ y \leqslant -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-3x+y^2-2y=a+1, \\ 2y-x+a=-1, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

16. Найдите все неотрицательные значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=b+1, \\ y-x=\dfrac{b+2}{2}, \\ y \geqslant 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. Найдите все значения параметра a, при которых данная функция имеет хотя бы одну точку экстремума x_0, заключенную в указанном интервале:

▲ а) $y = \dfrac{x^2 + 2ax - 3a - 4}{x - 2}$; $a < x_0 < 3a$;

б) $y = \dfrac{x^2 + ax + 2a + 3}{x + 1}$; $\dfrac{a}{4} < x_0 < \dfrac{2a}{5}$;

в) $y = \dfrac{x^2 + ax + a - 3}{x + 2}$; $\dfrac{4a}{3} < x_0 < \dfrac{5a}{8}$;

г) $y = \dfrac{x^2 - ax + 2a - 9}{x - 3}$; $-\dfrac{a}{4} < x_0 < -2a$.

§ 2. ЗАДАЧИ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

1. При всех допустимых значениях параметра решите уравнение:

▲ а) $\dfrac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x} = \dfrac{\cos^2 x - 0,25}{a \cos x}$;

б) $\dfrac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x} = \dfrac{0,5 - 2\cos^2 x}{p \cos x}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x} = q\dfrac{1 - 4\sin^2 x}{\sin x}$.

2. При каких значениях параметра данное уравнение имеет ровно m решений на указанном отрезке $[\alpha; \beta]$? Решите задачу, если:

▲ а) $2(2a - 1)\sin 4x - (a + 3)\cos 8x + 3a = 1$; $m = 8$; $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$;

б) $(b - 1)\cos^2 3x - 4(b + 2)\sin 3x + 2 = 2b$; $m = 6$; $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$;

в) $(c - 2)\cos 6x - 2(c - 5)\sin 3x = 3$; $m = 6$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$;

г) $15 \cos^2 5x + 2(2p + 1)\sin 5x + 4p(p + 1) = 14$; $m = 15$; $\alpha = 2\pi$, $\beta = 4\pi$.

3. При каких значениях параметра данное уравнение имеет ровно m решений на указанном отрезке $[\alpha; \beta]$? Решите задачу, если:

▲ а) $a \sin 3x + \sqrt{3(1 - a)} \cos 3x = 2a - 3$; $m = 3$; $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$;

б) $\dfrac{5b^2 + 2}{5b + 2} \sin 5x + (\sqrt{-2b - 3}) \cos 5x = 4b + 3$; $m = 5$; $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$;

в) $\frac{c^2-1}{c-1}\sin 2x + (\sqrt{4-c})\cos 2x = 5c + 2$; $m = 2$; $\alpha = \pi$, $\beta = 3\pi$;

г) $\frac{d^2+2d}{d+2}\sin 4x + (\sqrt{13-4d})\cos 4x + 2d = 1$; $m = 4$; $\alpha = 2\pi$, $\beta = 4\pi$.

4. Найдите все значения параметра, при которых заданное уравнение имеет единственное решение:

▲ а) $a^2\cos x + \sin^2\frac{4x}{a^2-1} - 2a\sqrt{x^2+1} = 3$;

б) $12b^2\cos x - 6b\cos^2\frac{7x}{b+6} - 6|x| = 11b^2 - 11b + 6$;

в) $c^2(4\sqrt{|x|} - 3|\sin x|) + 3|c|\sin\left|\frac{5x}{|c|+4}\right| = 4\sqrt{1-x^2} - 3|c| - c^2$;

г) $d^2(3\sqrt{|x|} + x^2) - \frac{50dx^2}{(d+3)^2} = 2d^2 + 2d - 12 - 12\sin^2 x$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых заданное уравнение имеет единственное решение на любом промежутке вида $(b-\varphi_1; b-\varphi_2)$, где b — произвольное действительное число, а φ_1 и φ_2 — заданные значения обратных тригонометрических функций. Решите задачу, если:

▲ а) $2\sin 4x - 4 = 3\cos 4x + a$; $\varphi_1 = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

б) $3\sin 4x + a = 2 - 5\cos 4x$; $\varphi_1 = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$;

в) $4\sin 4x + 1 = 3a + 2\cos 4x$; $\varphi_1 = \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$;

г) $\sin 4x - 5a = 2 - 3\cos 4x$; $\varphi_1 = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

Глава XI

Разные задачи

§ 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СУММИРОВАНИЕ

Метод доказательства, называемый методом *математической индукции*, основан на принципе, который является одной из аксиом арифметики натуральных чисел.

Принцип математической индукции. Утверждение $A(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполняются следующие два условия:

1) утверждение $A(n)$ истинно для $n = 1$;

2) из предположения, что $A(n)$ истинно для $n = k$ (где k — любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения $n = k + 1$.

Доказательство методом математической индукции состоит из двух частей: сначала проверяют истинность $A(1)$; затем предполагают истинность $A(n)$ для $n = k$ и доказывают истинность $A(n)$ для $n = k + 1$, т. е. $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$.

Если доказано, что $A(1)$ истинно, и из истинности $A(n)$ для $n = k$ (где k — любое натуральное число), следует истинность $A(n)$ для $n = k + 1$, то $A(n)$ истинно для всех натуральных n.

Пример 1. Доказать, что при $x > -1$ справедливо неравенство

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx, \qquad (1)$$

верное для любого натурального n. Это неравенство называют *неравенством Бернулли*.

▲ 1. При $n = 1$ имеем $(1 + x)^1 = 1 + x$. Одно из соотношений «$>$» или «$=$» выполнено, поэтому $A(1)$ истинно.

2. Докажем, что из истинности $A(k)$ следует истинность $A(k + 1)$ для любого натурального k. Пусть неравенство

$$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx \qquad (2)$$

истинно. Умножим обе части неравенства (2) на $1 + x$. Поскольку $1 + x > 0$, имеем

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant (1 + kx)(1 + x),$$

или

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x + kx^2.$$

Учитывая, что $kx^2 \geqslant 0$, получаем

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x,$$

т. е. $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$.

Так как неравенство (1) истинно для $n = 1$ и из истинности этого неравенства для любого натурального k следует его истинность для $n = k + 1$, то, согласно принципу математической индукции, неравенство (1) истинно для всех натуральных n.

Методом математической индукции доказывают предложения, определенные при целых отрицательных n (выполнив замену $n = -m$), а также предложения, определенные на множестве целых чисел, начиная с $n = m$. В последнем случае доказательство основывается на следующем *обобщении принципа математической индукции*.

Если предложение $A(n)$, где n — целое число, истинно для $n = m$ и из истинности этого предложения для $n = k$, где k — любое целое число, большее или равное m, следует его истинность для $n = k + 1$, то предложение $A(n)$ истинно для любого целого $n \geqslant m$.

П р и м е р 2. Доказать, что неравенство

$$2^n > 2n + 1 \tag{3}$$

верно для всех натуральных $n \geqslant 3$.

▲ 1. Если $n = 3$, то $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, т. е. $A(n)$ истинно.

2. Докажем, что из истинности неравенства для любого натурального $k \geqslant 3$ следует его истинность для $n = k + 1$.

Итак, пусть

$$2^k > 2k + 1, \tag{4}$$

тогда $2^k + 2^k > 4k + 2$, т. е.

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1 + (2k - 1). \tag{5}$$

Так как $2k - 1 > 0$ для всех натуральных k, то из справедливости неравенства (5) следует справедливость неравенства

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1,$$

т. е. $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$. Итак, обе части доказательства проведены, следовательно, неравенство (3) верно для любого натурального $n \geqslant 3$.

П р и м е р 3. Доказать, что неравенство

$$2^n > n^2 \tag{6}$$

верно для любого натурального $n \geqslant 5$.

▲ 1. Для $n = 5$ имеем $2^5 = 32 > 5^2 = 25$, т. е. неравенство (6) истинно.

2. Докажем, что из истинности $A(k)$ следует истинность $A(k+1)$ для любого $k \geqslant 5$. Пусть неравенство

$$2^k > k^2 \tag{7}$$

истинно. Тогда

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + 2^k. \tag{8}$$

Согласно доказанному ранее (см. пример 2), $2^k > 2k + 1$ для $k \geqslant 3$. Поэтому из неравенств (8) и (4), верных для всех натуральных $k \geqslant 3$, следует истинность неравенства $2^{k+1} > (k+1)^2$, т. е. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Итак, обе части доказательства проведены, следовательно, неравенство (6) верно для любого натурального $n \geqslant 5$.

Методом математической индукции решите задачи:

Докажите, что:

1. При любом натуральном n выражение $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ делится на 3.

2. Сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

3. ▲ При любом натуральном $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}\,.$$

4. ▲ При любом натуральном n и любом $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо неравенство $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$.

5. При любом натуральном $n > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}\,.$$

6. При любом целом натуральном n сумма $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

7. а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

8. $1 + 3 + 6 + \ldots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

9. а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

10. а) $n^{n+1} > (n+1)^n$, где $n \geqslant 3$;

б) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, где $n \geqslant 1$.

Найдите сумму:

11. ● $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

12. ● $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Найдите предел этой суммы при $n \to +\infty$.

13. ● $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$

14. ▲ $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$, $x \neq 1$.

15. а) $x + 2x^3 + 3x^5 + \ldots + nx^{2n-1}$, $x \neq \pm 1$;

б) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \ldots + \frac{n}{x^n}$, $x \neq 1$.

§ 2. КОМБИНАТОРИКА. БИНОМ НЬЮТОНА

Перестановки. Установленный в конечном множестве порядок называют *перестановкой* его элементов. Число перестановок конечного множества элементов зависит только от числа элементов; для множества из n элементов число перестановок обозначают P_n. Множество из одного элемента можно упорядочить единственным образом; единственный элемент множества считается первым, поэтому $P_1 = 1$. Методом математической индукции доказывается, что P_n равно произведению n первых натуральных чисел:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1)$$

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ обозначают $n!$. Поэтому $P_n = n!$. По определению считают $P_0 = 0! = 1$.

Размещения. Множество, в котором задан порядок расположения его элементов, называют *упорядоченным*. Упорядоченное множество записывают, располагая в круглых скобках его элементы в заданном порядке. Например, (А, Б, В) — упорядоченное множество с первым элементом А, вторым элементом Б и третьим элементом В. Конечные упорядоченные множества называют *размещениями*. Число размещений по m элементов в каждом, составленных из данных n элементов, обозначают A_n^m. Методом математической индукции доказывается, что

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2}$$

Эту формулу записывают также в виде

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1). \tag{3}$$

Сочетания. В комбинаторике конечные множества называют *сочетаниями*. Число сочетаний из n по m (т. е. число таких подмножеств по m элементов в каждом, которые содержатся в множестве из n элементов) обозначают через C_n^m.

Вычислив число размещений из n по m, можно получить, что

$$A_n^m = C_n^m P_m, \tag{4}$$

откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{5}$$

Эту формулу записывают также в виде

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m}. \tag{6}$$

Для любых n и m ($0 \leqslant m \leqslant n$) верно равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{7}$$

Действительно,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m}.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{8}$$

Это равенство можно также доказать, полагая в формуле бинома Ньютона $a = b = 1$. Справедливость равенства (8) следует также из того, что сумма $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$ есть полное число подмножеств, содержащихся в множестве из n элементов, а оно равно 2^n.

Для любых n и m таких, что $0 \leqslant m \leqslant n$, справедливо равенство

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \qquad (9)$$

Это равенство можно доказать, представив C_n^m и C_n^{m+1} по формуле (5) и сложив полученные дроби.

Решите уравнение:

1. ▲ $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x,\ x \in \boldsymbol{N}.$

2. ▲ $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1),\ x \in \boldsymbol{N}.$

3. $C_{x+1}^2 \cdot A_x^2 - 4x^3 = (A_{2x}^1)^2,\ x \in \boldsymbol{N}.$

4. $A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20,\ x \in \boldsymbol{N}.$

5. ● $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720,\ x \in \boldsymbol{N}.$

Решите неравенство:

6. $C_{13}^m < C_{13}^{m+2},\ m \in \boldsymbol{N}.$

7. $5C_n^3 < C_{n+2}^4,\ n \in \boldsymbol{N}.$

8. $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{x-2}^2 < 0,\ x \in \boldsymbol{N}.$

9. $\dfrac{A_{n+1}^4}{C_{n-1}^{n-3}} > 14P_3,\ n \in \boldsymbol{N}.$

10. ▲ $C_{x+1}^{x-1} > \dfrac{3}{2},\ x \in \boldsymbol{N}.$

11. Сколько отрицательных членов содержит последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = C_{n+5}^4 - \dfrac{143}{96} \cdot \dfrac{P_{n+5}}{P_{n+3}},\ n \in \boldsymbol{N}$?

12. Сколько отрицательных членов содержит последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{195}{4p_n} - \dfrac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}},\ n \in \boldsymbol{N}$?

13. На одной стороне треугольника взято n точек, на второй — m точек и на третьей — k точек, причем ни одна точка не является вершиной данного треугольника. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

14. ▲ За одним столом надо рассадить 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами это можно сделать?

15. В 12-этажном доме на первом этаже в лифт вошли 9 человек. Известно, что они выходят группами по 2, 3 и 4 человека на разных этажах. Сколькими способами они могут это сделать, если на втором этаже лифт не останавливается?

16. Сколькими способами 10 одинаковых подарков можно распределить между шестью детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

17. На один ряд, в котором 8 стульев, рассаживают 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами они могут сесть так, чтобы не все девушки оказались сидящими рядом?

18. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были четными?

19. Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

20. Сколько существует четырехзначных чисел, запись которых в десятичной системе счисления содержит не более двух разных цифр?

21. Сколько различных семизначных чисел можно написать, пользуясь только тремя цифрами 1, 2, 3, при условии, что цифра 2 в каждом числе встречается дважды?

22. ▲ Из 18 различных цветков нужно составить букет так, чтобы в него входило не менее 3 цветков. Сколько существует различных способов для составления такого букета?

23. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать, пользуясь только по разу цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы в каждом из них была цифра 1?

24. ● Сколько существует различных шестизначных чисел, сумма цифр которых нечетная?

25. В шахматном турнире среди участников были две женщины. Каждый участник турнира играл с остальными участниками по две партии. Число партий, сыгранных мужчинами между собой, оказалось на 66 больше числа партий, сыгранных мужчинами с женщинами. Сколько всего было участников турнира и сколько всего было сыграно партий?

Бином Ньютона. Формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \quad (1)$$

справедливую при любом натуральном n, называют *формулой бинома Ньютона* или *биномом Ньютона*. Коэффициенты C_n^k в формуле (1) называют *биномальными коэффициентами*: $(k+1)$-е слагаемое суммы (1) считается k-м членом разложения и обозначается через T_k:

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k, \; k = 0, 1, \ldots n. \quad (2)$$

26. Найдите наибольший коэффициент разложения $(x+1)^n$, если сумма его коэффициентов равна 1024.

27. Найдите член разложения $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$, не содержащий x.

28. Найдите средний член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

29. Сумма коэффициентов первых трех слагаемых разложения $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ равна 46. Найдите член разложения, не содержащий x.

30. Найдите член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, не содержащий a.

31. Найдите второе слагаемое бинома $\left(\sqrt[13]{a} + \frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^m$, если $C_m^3 : C_m^2 = 4 : 1$.

32. Найдите третий член разложения $\left(x^2 - \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^m$, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 128.

33. Найдите x, если известно, что третий член разложения бинома $(x + x^{\lg x})^5$ равен 1 000 000.

34. ● Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

35. ● Найдите показатель бинома $\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\right)^n$, если 10-й член разложения имеет наибольший коэффициент.

36. ▲ Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1-2x+$ $+4x^2)^{12}$.

37. ▲ При каком x четвертое слагаемое разложения бинома $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x+1}}}-\sqrt[12]{x}\right)^6$ равно 200?

38. ▲ Сумма коэффициентов первых трех слагаемых разложения $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ равна 241. Найдите член разложения, содержащий x^6.

39. В разложении $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент второго члена на 44 больше биномиального коэффициента первого члена. Найдите номер члена разложения, не содержащего x.

40. Найдите член разложения $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, не содержащий x.

41. Определите A_n^3, если третий член разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

42. ▲ Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in \boldsymbol{N}$, при $n\to+\infty$ монотонно возрастает.

43. ▲ Докажите, что $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$ для любого $n\in \boldsymbol{N}$, $n>2$.

44. ▲ Докажите, что $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ для любого $n\in \boldsymbol{N}$.

45. ▲ Докажите неравенство $n^{n+1}>(n+1)^n$, где $n\geqslant 3$, $n\in \boldsymbol{N}$.

§ 3. НЕСТАНДАРТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решите уравнение:

1. а) $x(x+1)+(x+1)(x+2)+\ldots$
$\ldots+(x+10)(x+11)=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+10\cdot 11;$

б) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}} = 2;$

в) $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = 4;$

г) $\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1} = 2\cos x.$

2. ▲ а) $\sqrt{3-2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x}\cdot\sin x = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6};$

б) $\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\cos x = \frac{1}{2\sqrt{2}};$

в) $\sqrt{2\cos 2x-4\cos x+3}\cdot\cos x = -1;$

г) $\sqrt{43-18\cos 2x-60\sin x}\cdot\sin x = -1.$

3. ▲ а) $\sqrt{\pi^2-x^2}\left[\log_{\cos x}\left(1-\frac{3\cos x}{2}\right)-2\right] = 0;$

б) $\sqrt{\pi^2-4x^2}\left[\log_{\sin x}\left(\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1\right] = 0;$

в) $\sqrt{\pi^2-9x^2}\left[\log_{\cos x}\left(\cos 2x+\frac{1}{4}\right)-2\right] = 0;$

г) $\sqrt{9\pi^2-16x^2}\,[\log_{\cos 2x}(3\cos 4x+2)-1] = 0.$

4. Определите количество корней уравнения при различных $a \in \boldsymbol{R}$:

● а) $x^4-4x^3+4x^2-1 = a;$

б) $3x^4+8x^3-6x^2-24x-8 = a;$

в) $2x^3-3x^2-12x+12 = a.$

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2\operatorname{arctg} x + y - e^z = 3, \\ 4\operatorname{arctg} x - y - 2e^z = 0, \\ \operatorname{arctg} x + y + e^z = 3a+1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + \ln y^2 - 2\sin z = 0, \\ 3x - 2\ln y^2 + 4\sin z = 7, \\ x + \ln y^2 + \sin z = 3a+2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 2\arccos y + z = 1, \\ 5\sqrt{x} + \arccos y + z = 6a-14, \\ \sqrt{x} + \arccos y + 2z = 2a+1. \end{cases}$

6. Найдите уравнения общих касательных к двум данным параболам и укажите точки касания:

а) $y = x^2$, $y = -(x - 1)^2$;

б) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = -x^2 - 4x + 1$;

в) $y = x^2 + 4$, $y = -2x^2 - 2x + 1$.

7. Точки касания двух общих касательных к данным параболам (b, c — действительные параметры) являются вершинами четырехугольника. Найдите наименьшее значение параметра c, при котором площадь этого четырехугольника равна указанному числу S. Решите задачу, если:

▲ а) $y = -x^2 + 5x + 1$, $y = x^2 + bx + c$, $S = 8$;

б) $y = x^2 + bx + 3$, $y = -x^2 + 2x + c$, $S = 27$;

в) $y = -x^2 + bx - 1$, $y = x^2 + 4x + c$, $S = 1$;

г) $y = x^2 + x - 4$, $y = -x^2 + bx + c$, $S = 64$.

Решите неравенство:

8. ▲ а) $\log_{x-3} \dfrac{\sqrt{5x-17}}{2} \leqslant 1$; б) $\log_{x+2} \dfrac{\sqrt{9x+14}}{2} \leqslant 1$;

в) $\log_{x-1} \dfrac{\sqrt{5x-7}}{2} \geqslant 1$; г) $\log_{x+2} \dfrac{12x+16}{4-x} > 2$.

9. ▲ а) $\dfrac{\sqrt{(x-1)(x-2)\log_{x^2}\dfrac{2}{x^2}}}{|x+2|} > \dfrac{x^2 - 3x + 1 + \log_{|x|}\sqrt{2}}{x+2}$;

б) $\dfrac{\sqrt{(x+1)(x-2)(\log_{x^2}(x+2) - 1)}}{|x|} \geqslant \dfrac{x^2 - x - 3 + \log_{x^2}(x+2)}{x}$;

в) $\sqrt{\dfrac{(x-2)(\log_{|x|}(x+3) - 1)}{(x+2)^2 x}} < \dfrac{x\log_{|x|}(x+3) - 2}{(x+2)x}$;

г) $\sqrt{\dfrac{x\log_2(x^2-2)}{(x^2-1)(x+2)}} < \dfrac{x(x+1) + (x^2+x-2)(\log_2 x^2 - 2)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$.

10. Найдите все действительные значения параметра, при которых для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство:

▲ а) $\sin^2 x - (a + 1)\sin x + 2a + 3 > 0$;

б) $\sin 2x + (b + 1)\sqrt{2}\,\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 2b$;

в) $\cos^2 x + (c + 1)\sin x < 3c + 2$;

г) $\sin 2x - (p + 1)(\sin x + \cos x) + 2p + 1 > 0$.

11. График данной функции $f(x)$ и график ее первообразной $F(x)$ касаются в точке с абсциссой x_0, удовлетворяющей заданному условию. Найдите множество значений x, для которых выполняется указанное неравенство, если:

а) $f(x) = 6x^2 + 2x + 6$; $x_0 > 0{,}7$; $\frac{F(x) - f(x)}{f'(x)} \geqslant 0$;

б) $f(x) = x^2 + 3x - 3$; $x_0 < 1$; $\frac{F(x) - f(x)}{1 + f'(x)} \leqslant 0$;

в) $f(x) = -x^2 - x + 1$; $x_0 > 0$; $\frac{F(x) - f(x)}{1 + f(x)} \leqslant 0$;

г) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $x_0 > 2$; $\frac{F(x) - f(x)}{4 - f(x)} \leqslant 0$.

12. ▲ Найдите геометрическое место точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных к кривой $y = ax^2$, $a > 0$.

13. ▲ Найдите площадь треугольника, образованного двумя взаимно перпендикулярными касательными к параболе $y = x^2$ и прямой, проходящей через точки касания, при условии, что эта площадь является наименьшей из всех возможных.

§ 4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Основой тождественных преобразований числовых и алгебраических выражений служат следующие формулы сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 \mp b^3 = (a - b)(a^2 \pm ab + b^2),$$

а также более общие формулы

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

справедливые для любых натуральных n и любых чисел a и b.

Вычислите без применения калькулятора:

1. а) $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$;

в) $(\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}})^2$; г) $(\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} - \sqrt{7 - 3\sqrt{5}})^2$.

2. а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}$;

г) $\sqrt[4]{15+12\sqrt{2}}-\sqrt[4]{15-12\sqrt{2}}$;

д) $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$.

Упростите выражение:

3. а) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2+2ab}:\dfrac{b-a}{a+b}$;

б) $\left(\dfrac{a+1}{a^3-1}-\dfrac{1}{a^2+a+1}-\dfrac{2}{1-a}\right):\dfrac{a^2+a+2}{a^3-1}$;

в) $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$;

г) $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}$;

д) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$;

е) $\left(\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}\right)$;

ж) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}-\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{ab})}{(\sqrt[3]{b^{-1}}-\sqrt[3]{a^{-1}})(a+b)}$.

4. а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

б) $\dfrac{x^2}{3+x}\cdot\dfrac{9-x^2}{x^2-3x}+\dfrac{27+x^2}{3-x}:\left(3+\dfrac{x^2}{3-x}\right)$;

в) $\left[\dfrac{x^2}{2y}-\dfrac{(x-y)^2}{2y+4}-\dfrac{(x-y)^2}{2y+y^2}\right]\cdot\left[\dfrac{(1-x)^2}{x^2+xy}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{(y+1)^2}{xy+y^2}\right]$;

г) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right)\left(\dfrac{a^2}{b^2-ab}-\dfrac{b}{a}\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\left(\dfrac{a^2}{b^2-ab}-\dfrac{a}{b}\right)$;

д) $\left[\dfrac{(a-b)^2}{b^2+b}+\dfrac{(1+a)^2}{1+b}-\dfrac{a^2}{b}\right]:\left[\dfrac{(a+2)^2}{a^2+ab}+\dfrac{(2-b)^2}{ab+b^2}-\dfrac{4}{ab}\right]$;

е) $\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\left(\dfrac{b}{b-a}-1\right)-\left(\dfrac{b}{a+b}+1\right)\left(\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{a^2}{b^2}\right)$.

5. $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\dfrac{2a}{b+a}$, если $0<a<b$.

6. а) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$;

б) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$;

в) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

§ 5. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. ▲ Докажите, что если $a>0$, $b>0$, то

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

причем равенство имеет место лишь при $a=b$.

2. Докажите, что из равенств

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1,\qquad b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$$

следует

$$-1\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant 1.$$

3. Докажите, что если $a_1>0$, $a_2>0$, ... $a_n>0$, то

$$\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\geqslant\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}\cdot a_n},$$

причем равенство имеет место лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

4. ▲ Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, то

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd},$$

причем равенство имеет место лишь при $a=b=c=d$.

5. ● Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$

причем равенство имеет место лишь при $a=b=c$.

6. ▲ Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$; $n \geqslant 2$. Докажите, что:

а) если $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$, причем знак равенства имеет место лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$;

б) $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, причем знак равенства имеет место лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (*неравенство Коши*).

7. Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, то

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

8. ▲ Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию ($a_i > 0$). Докажите, что

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}$$

(в частности, $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$ при $n > 2$).

9. ▲ Докажите, что:

а) $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$, $n = 3, 4, \ldots$;

б) $\sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1}$, $n = 2, 3, \ldots$.

10. Докажите, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

(n — целое положительное число).

11. Докажите, что

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n, \ n = 2, 3, \ldots.$$

12. ▲ Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n,$$

причем равенство имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

13. ▲ Докажите, что

$$\left(\sum_{t=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{t=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{t=1}^{n} b_i^2,$$

где a_i, b_i — любые действительные числа, причем знак равенства имеет место лишь при условии $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ (*неравенство Буняковского*).

14. ▲ Докажите, что если первые два члена арифметической прогрессии положительны, не равны между собой и совпадают с двумя первыми членами геометрической прогрессии, то все члены арифметической прогрессии, начиная с третьего, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии (*теорема Бернулли*).

15. ▲ Докажите, что при нечетном n из равенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

следует

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

16. ● Докажите, что между корнями и коэффициентами кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ существует следующая зависимость:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

17. Докажите, что между корнями и коэффициентами уравнения

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

существует следующая зависимость:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

18. ▲ Докажите, что если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то свободный член уравнения делится на этот корень.

Определение. *Рациональными числами* называют числа, которые можно представить в виде простых дробей $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа ($n \neq 0$). (Можно дать другое определение, равносильное данному: рациональными числами называют числа, которые можно представить в виде бесконечных десятичных периодических дробей.)

19. ▲ Докажите, что уравнение с целыми коэффициентами

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1 = 0$$

не имеет рациональных корней, не равных ± 1.

20. Докажите, что уравнение

$$x^{2n} + ax + 1 = 0$$

не имеет рациональных корней, если a — целое число, $a \neq \pm 2$.

21. ▲ Докажите, что если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты, то a_0 делится на p, а a_n делится на q.

22. Докажите, что если в уравнении с целыми коэффициентами сумма всех коэффициентов и свободный член являются нечетными числами, то уравнение не имеет целых корней.

23. Покажите, что произведение n последовательных натуральных чисел делится на произведение n первых натуральных чисел.

24. Докажите, что если $a + b = 1$, где a и b — действительные числа, то:

а) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$, б) $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

25. ▲ Докажите, что $2^{105} + 3^{105}$ делится на 5, 35, 275, 2315.

26. Докажите, что

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

27. Докажите, что для натуральных n и m справедливо неравенство

$$\sqrt[n+m]{m^n n^m} \leqslant \frac{m+n}{2}.$$

28. Докажите неравенство:

а) $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$; ▲ б) $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_\pi 2} > 2$.

29. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $m \geqslant n$, где m, n — натуральные числа, то

$$(a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \leqslant (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}.$$

30. ▲ Докажите, что многочлен $x^{10} - x^7 + x^4 - x^2 + 1$ положителен при всех действительных значениях x.

§ 6. ВОЗВРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Возвратным уравнением называют уравнение вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0, \qquad (1)$$

в котором коэффициенты членов многочлена, расположенные на одинаковом расстоянии от начала и конца, равны. Ни один из корней возвратного уравнения не равен нулю, при этом если число α является корнем, то число $\frac{1}{\alpha}$ также является его корнем. В самом деле,

$$a\frac{1}{\alpha^n} + \frac{b}{\alpha^{n-1}} + \ldots + b\frac{1}{\alpha} + a = \frac{a + b\alpha + \ldots + b\alpha^{n-1} + a\alpha^n}{\alpha^n} = 0.$$

Если n — четное, т.е. $n = 2m$, где m — натуральное число, то разделив на x^m уравнение

$$ax^{2m} + bx^{2m-1} + cx^{2m-2} + \ldots + fx^{m+1} + gx^m + fx^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + cx^2 + bx + a = 0, \qquad (2)$$

получим

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + fx + g + f\frac{1}{x} + \ldots$$
$$\ldots + c\frac{1}{x^{m-2}} + b\frac{1}{x^{m-1}} + a\frac{1}{x^m} = 0,$$

или

$$a\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + b\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) +$$
$$+ c\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots + f\left(x + \frac{1}{x}\right) + g = 0.$$

Полагая $x + \frac{1}{x} = t$, для определения t получаем уравнение степени m. Степень уравнения понизилась вдвое. Найдя его корни $t = t_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, для определения корней уравнения (2) получим уравнения

$$x + \frac{1}{x} = t_k,\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Если n — нечетное, т.е. $n = 2m + 1$, где $m \in N$, то уравнение (1) имеет вид

$$ax^{2m+1} + bx^{2m} + cx^{2m-1} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0. \qquad (3)$$

Очевидно, $x = -1$ является корнем этого уравнения. Разделив уравнение (3) на $x + 1$, получим возвратное уравнение степени $2m$, которое решается указанным способом.

Если в уравнении (1) перейти к новому неизвестному, положив $x = \frac{y}{k}$, то для определения y получим уравнение

$$ay^n + bky^{n-1} + ck^2y^{n-2} + \ldots + ck^{n-2}y^2 + bk^{n-1}y + ak^n = 0,$$

которое можно решить как возвратное уравнение с помощью подстановки $y + \frac{k}{y} = t$.

Если в уравнении (1) положить $x = ky$, то получим уравнение

$$ak^ny^n + bk^{n-1}y^{n-1} + \ldots + bky + a = 0.$$

Оно решается как возвратное с помощью подстановки $ky + \frac{1}{y} = t$.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$4x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2x + 1 = 0. \qquad (4)$$

▲ Разделив данное уравнение на $4x^2$, получим

$$x^2 - x - 3 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4x^2} - \left(x - \frac{1}{2x}\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2x}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{2x} = -1, \\ x - \frac{1}{2x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ x_4 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}.$$

О т в е т: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0.$$

▲ Очевидно, $x_1 = -1$ является корнем данного уравнения. Разделив уравнение на $x + 1$, получим возвратное уравнение

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Разделив это уравнение на x^2, получаем

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x^2}\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 1, \\ x + \frac{1}{x} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

О т в е т: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответы, указания, решения

Глава I

Алгебраические уравнения и неравенства. Функции одной переменной

§ 1. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2. ▲ Заметим, что неравенства

$$|x| < a, \tag{1}$$

и

$$-a < x < a \tag{2}$$

имеют смысл лишь в случае, если $a > 0$. Пусть число x удовлетворяет неравенству (1). Докажем, что это число будет удовлетворять двойному неравенству (2). Рассмотрим два случая: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x < 0$.

1. Пусть $x \geqslant 0$, тогда $|x| = x$, следовательно, неравенство (1) можно записать в виде $x < a$. Так как $x \geqslant 0$, то $x > -a$. Объединяя эти неравенства, получаем $-a < x < a$.

2. Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$; следовательно, неравенство (1) можно записать в виде $-x < a$ или $x > -a$. Так как $x < 0$, то $x < a$. Объединяя эти неравенства, получаем $-a < x < a$.

Аналогично доказывается обратное утверждение: если число x удовлетворяет двойному неравенству (2), то оно будет удовлетворять неравенству (1).

5. ▲ Для любых действительных чисел x и y имеют место следующие неравенства (см. задачу 1):

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \qquad -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Сложив их, получаем неравенство

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant (|x| + |y|),$$

равносильное (см. задачу 2) неравенству $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

6. ▲ Положим $x = y + t$. Согласно доказанному в задаче 5, имеем

$$|t + y| \leqslant |t| + |y|, \text{ или } |t + y| - |y| \leqslant |t|,$$

откуда $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

8. а) ▲ Если $a \neq b$, то $(a - b)^2 > 0$, откуда $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, $a^2 + b^2 > 2ab$ или $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$. (Деление на ab не изменяет знака неравенства, так как $ab > 0$.) Если же $a = b$, то знак неравенства заменяется всюду знаком равенства.

9. а) $\{a\}$ при $a \neq 0$; $\{c \mid c \in \boldsymbol{R}\}$ при $a = 0$; б) $\{a + 2\}$ при $a \neq 2$; $\{c \mid c \in \boldsymbol{R}\}$ при $a = 2$; в) $\left\{\frac{a^2 - 3a + 9}{a - 3}\right\}$ при $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; $\{c \mid c \in \boldsymbol{R}\}$ при $a = -3$; $\varnothing$ при $a = 3$.

10. а) $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$; б) $(-\infty; -7]$; в) $\left[\frac{1}{a}; +\infty\right)$ при $a \in [-\infty; 0)$; $(-\infty; +\infty)$ при $a = 0$; $\left(-\infty; \frac{1}{a}\right]$ при $a \in (0; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{a}\right)$ при $a \in (-\infty; 0)$; $\varnothing$ при $a = 0$; $\left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$ при $a \in (0; +\infty)$. **11.** а) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $(-1; 2]$; г) $\varnothing$. **12.** $\{1; 2; 3; 4\}$. **13.** а) $\{-2; 4\}$; б) $\varnothing$; в) $\{3 - a; 3 + a\}$ при $a \in [0; +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in [-\infty; 0)$; г) $\{a - 2; a + 2\}$ при $a \in (-\infty; +\infty)$. **14.** а) $[3; +\infty)$; б) $(-\infty; 3]$; в) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **15.** а) $\left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$.

▲ Исходное уравнение равносильно уравнению

$$|2x - 1|^2 = |x + 3|^2, \text{ или}$$

$$(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = (2x - 1 + x + 3)(2x - 1 - x - 3) = 0,$$

решая которое найдем корни; б) $(-\infty; +\infty)$ при $a = 4$; $\left\{\frac{a}{2} + 2\right\}$ при $a \neq 4$.

16. а) $\{-4{,}5; 4{,}5\}$. ▲ *I способ.* Будем искать решения уравнения на трех промежутках: 1) $-\infty < x < -4$, 2) $-4 \leqslant x < 4$, 3) $4 \leqslant x < +\infty$. На первом промежутке левая часть уравнения имеет вид $-(x - 4) + (-1)(x + 4) = 9$, откуда $2x = -9$; $x = -4{,}5$ — корень уравнения. На втором промежутке левая часть уравнения имеет вид $-(x - 4) + (x + 4) = 9$, откуда получаем $8 = 9$ (равенство ложное), поэтому на втором промежутке уравнение корней не имеет. Для третьего промежутка имеем $(x - 4) + (x + 4) = 9$ или $2x = 9$; $x = 4{,}5$ — второй корень уравнения.

II способ. Функция $f(x) = |x - 4| + |x + 4|$ — четная. Пусть $x_0 \geqslant 0$ — корень уравнения, тогда $-x_0$ также корень уравнения. Решая теперь уравнения $-(x - 4) + (x + 4) = 9$ на промежутке $0 \leqslant x < 4$ и $(x - 4) + (x + 4) = 9$ на промежутке $4 \leqslant x < +\infty$, найдем корень $x = 4{,}5$. В силу четности функции $f(x)$ вторым корнем уравнения является $x = -4{,}5$;

б) $[-4; 4]$; в) $(-\infty; -4]$; г) $[4; +\infty)$. **17.** $\{-6; 2\}$. **18.** $\{0\}$.

19. а) $(-\infty; +\infty)$ при $a \in (-\infty; 0)$; $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$ при $a \in [0; +\infty)$. ▲ При $a \in (-\infty; 0)$ неравенство выполняется для любого действительного x, так как $|x| \geqslant 0$ (по определению модуля числа). При неотрицательных значениях a исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{lll} -x > a & \text{при} & x < 0, \\ x > a & \text{при} & x \geqslant 0; \end{array}\right.$$

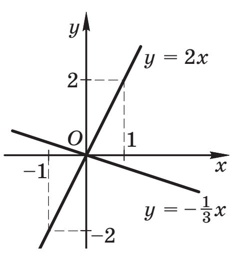
объединение решений полученной совокупности и дает полное решение неравенства; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **20.** а) $\varnothing$ при $a \in (-\infty; 0]$, $(-a; a)$ при $a \in (0; +\infty)$. ▲ Для положительных значений a исходное неравенство равносильно системе неравенств

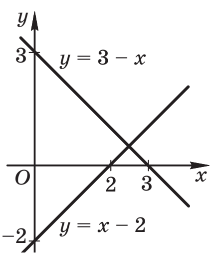
$$\begin{cases} -x < a, \\ x < a, \end{cases}$$

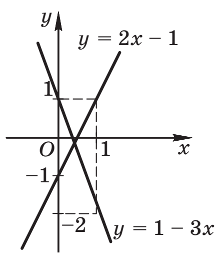
или неравенству $-a < x < a$; б) $\varnothing$; в) $(-4; 0)$. **21.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[1{,}5; +\infty)$. **22.** а) $[-0{,}75; 2{,}5]$; б) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty]$. **23.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (-1; 0]$. **24.** а) $\{2\}$; б) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$. **25.** $\{-3\}$. **26.** а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)$. **27.** $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; $\frac{1}{m^2 - 4}(x - |m|)$.

28. ● Рассмотрите функцию $F(x) = k_1(kx + b) + b_1$.

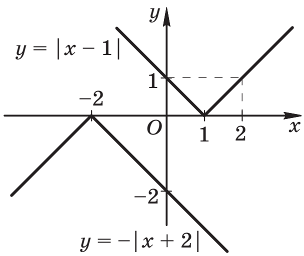
29. а); б). **30.** а); б). **31.** а); б).



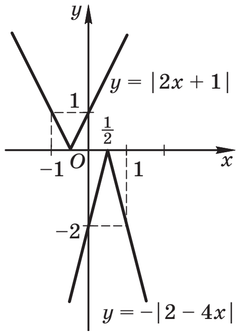




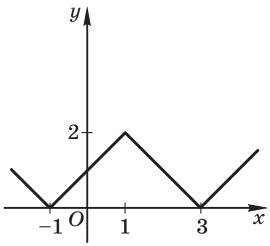
32. а); б).



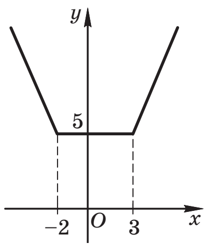
33. а); б).



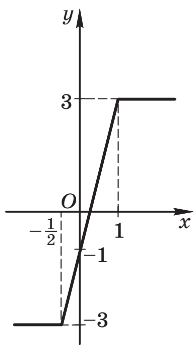
34.



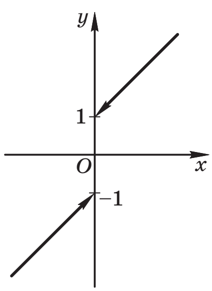
35.



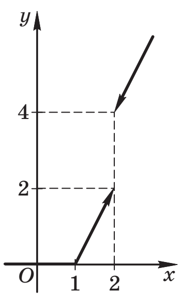
36.



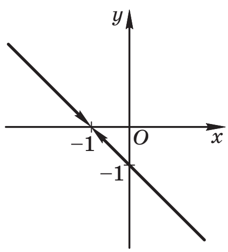
37.



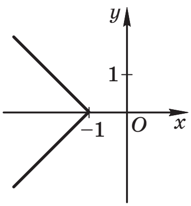
38.



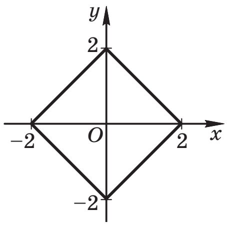
39.



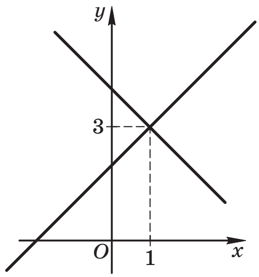
40.



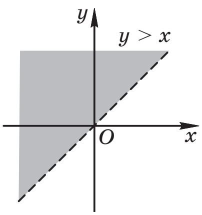
41.



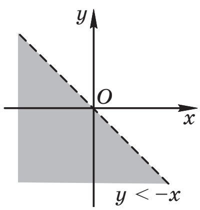
42.



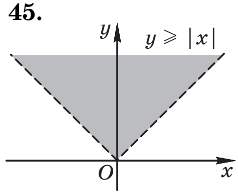
43.



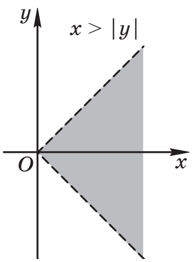
44.



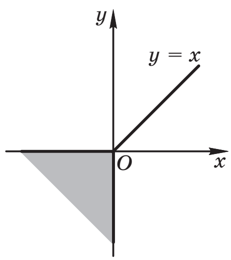
45.



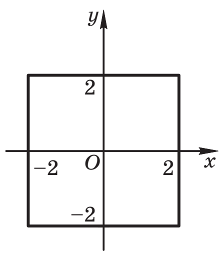
46.



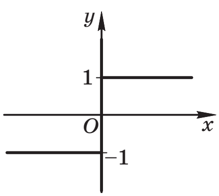
47.



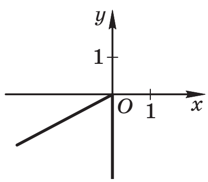
48.



49.



50.



51. $a = 1$. ▲ Так как данная функция определена в окрестности точки $x = 0$ и в самой этой точке $y(0) = 1$, то для ее непре-

рывности в этой точке необходимо, чтобы $\lim\limits_{x \to 0}(2x + 1) =$
$= \lim\limits_{x \to 0}(-x + a) = 1$, т. е. $a = 1$. **52.** а) $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$. ▲ Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками функции*. Данная функция дифференцируема в каждой точке области определения (так как она определена на всей числовой прямой, то все ее точки являются внутренними), кроме точки $x = -\dfrac{1}{3}$, поэтому $x = -\dfrac{1}{3}$ — критическая точка, а уравнение $y' = 0$ не имеет решений;

б) $(-\infty; -1]$. ▲ Представим заданную функцию в виде

$$y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{при} \quad x \geqslant -1, \\ 0 & \text{при} \quad x < -1. \end{cases}$$

На интервале $(-1; +\infty)$ имеем $y' = 2$, в точке $x = -1$ производная функции не существует, а на интервале $(-\infty; -1)$ имеем $y' = 0$ для всех точек интервала. Поэтому все точки луча $(-\infty; -1]$ являются критическими;

в) $[-1; 1]$; г) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **53.** а) Убывает на $(-\infty; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; +\infty)$. **54.** а) Убывает на $(-\infty; 4)$, возрастает на $(4; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; 0)$; убывает на $(0; +\infty)$. **55.** а) Возрастает на $(-\infty; -10)$, убывает на $(10; +\infty)$; б) убывает на $(-5; 4)$; в) убывает на интервалах $(-\infty; -4)$, $(-3; -2)$ и $(-1; 0)$; возрастает на интервалах $(-4; -3)$, $(-2; -1)$ и $(0; +\infty)$. **56.** а) $x = \dfrac{1}{2}$ — точка минимума; б) $x = \dfrac{3}{4}$ — точка максимума. **57.** а) $x = -\dfrac{2}{3}$ — точка минимума; б) $x = 2$ — точка максимума. ● а), б). Исследуйте знаки производных в окрестности каждой критической точки. **58.** $x = -2$ — точка максимума. **59.** $x = 2$ — точка минимума при $a = 2$. При других значениях a функция точек экстремума не имеет.

▲ Пусть $a < 2$ (при $a > 2$ решение аналогично). Тогда все точки отрезка $[a; 2]$ являются критическими, но ни в одной из них не выполняется достаточное условие экстремума. При $a = 2$ функция $y = 2|x - 2|$ имеет минимум в точке $x = 2$ (в самой этой точке функция недифференцируема, но в ее окрестности дифференцируема; производная в левой окрестности отрицательна, а в правой — положительна). **60.** $a \in [3; +\infty)$. **61.** $y_{\min}(1) = 1 - a$, $y_{\max}(2) = 2 - a$ при $a \in (-\infty; 1)$; $y_{\min}(2) = a - 2$, $y_{\max}(1) = a - 1$ при $a \in (2; +\infty)$; $y_{\min}(a) = 0$, $y_{\max}(2) = 2 - a$ при $a \in (1; 1{,}5)$; $y_{\min}(a) = 0$,

$y_{\max}(1) = a - 1$ при $a \in (1{,}5; 2)$; $y_{\min}(1{,}5) = 0$, $y_{\max}(1) = y_{\max}(2) = 0{,}5$ при $a = 1{,}5$.

62. а) $x \in \left\{-\frac{22}{5}; \frac{8}{3}\right\}$. ▲ Рассмотрим два случая: $x - 1 < 0$, и $x - 1 \geqslant 0$.

При $x - 1 < 0$ имеем $|x - 1| = 1 - x$, тогда

$$4x - |x - 1| + 7 = 4x - (1 - x) + 7 = 5x + 6.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ |5x + 6| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} |5x + 6| = -16, \\ |5x + 6| = 16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{22}{5}, \\ x = 2, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $x = -\frac{22}{5}$.

При $x - 1 \geqslant 0$ имеем $|x - 1| = x - 1$, тогда

$$4x - |x - 1| + 7 = 4x - (x - 1) + 7 = 3x + 8.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ |3x + 8| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} 3x + 8 = -16, \\ 3x + 8 = 16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = \frac{8}{3}, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $x = \frac{8}{3}$.

Объединяя эти решения, получаем ответ.

б) $\left\{-\frac{25}{2}; \frac{9}{4}\right\}$; в) $\left\{-5; \frac{13}{3}\right\}$; г) $\{-10\}$.

63. а) $x \in [2; 3]$. ▲ В точках $x = 2$ и $x = 3$ выражения, находящиеся в левой части под знаком модулей, обращаются в нуль. Эти точки делят числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; 2)$, $[2; 3]$ и $(3; +\infty)$. Рассмотрим исходное уравнение на каждом из этих промежутков.

Пусть $x \in [-\infty; 2)$. Так как $x - 2 < 0$, а $3 - x > 0$, т. е. $|x - 2| = -x + 2$, а $|3 - x| = 3 - x$, то

$$\begin{cases} |x - 2| + |3 - x| = 1, \\ x \in [-\infty; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2 + 3 - x = 1, \\ x \in [-\infty; 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x \in [-\infty; 2) \end{cases} \Rightarrow \text{решений нет.}$$

Пусть $x \in [2; 3]$. Так как $x - 2 \geqslant 0$ и $3 - x \geqslant 0$, то $|x - 2| = x - 2$ и $|3 - x| = 3 - x$. Поэтому

$$\begin{cases} |x-2| + |3-x| = 1, \\ x \in [2; 3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 + 3 - x = 1, \\ x \in [2; 3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1, \\ x \in [2; 3] \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 3].$$

Пусть $x \in (3; +\infty)$. Тогда $x - 2 > 0$, а $3 - x < 0$, поэтому $|x - 2| = x - 2$, а $|3 - x| = x - 3$. Таким образом,

$$\begin{cases} |x-2| + |3-x| = 1, \\ x \in (3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 + x - 3 = 1, \\ x \in (3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x \in (3; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{решений нет.}$$

Отсюда вытекает ответ.

б) $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$; в) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; г) $\left[\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right]$.

64. а) $x \in [-6; 2]$. ▲ Используя определение модуля, получим следующую совокупность систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ 9 - 2x - (2 - 3x) \geqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}, \\ 9 - 2x + (2 - 3x) \geqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{9}{2}, \\ -(9 - 2x) + (2 - 3x) \geqslant 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В результате последовательных преобразований имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ x \geqslant -6, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{3} \leqslant x < \frac{9}{2}, \\ x \leqslant 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{9}{2}, \\ x \leqslant -8 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leqslant x < \frac{2}{3}, \\ \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -6 \leqslant x \leqslant 2.$$

б) $[1; 7]$; в) $[-3; 1]$; г) $[-1; 1]$.

65. а) $x \in (-4; -2) \cup \left(\frac{4}{3}; 10\right)$. ▲ *I способ* (алгебраический). Отметим на числовой прямой нули функций, находящихся под знаком модуля, т. е. точки $x = -\frac{5}{2}$, $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{7}{2}$. Тогда на промежутках $x \leqslant -\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2} < x \leqslant -2$, $-2 < x \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{7}{2}$ и $x > \frac{7}{2}$ исходное неравенство упростится. Оно будет эквивалентно объединению неравенств:

$$\left[\begin{array}{lll} \begin{cases} -2x - 5 + x + 1 < 0, \\ x \leqslant -\frac{5}{2}, \end{cases} & \Leftrightarrow \quad -4 < x \leqslant -\frac{5}{2}, & \text{(I)} \\ \begin{cases} 2x + 5 + x + 1 < 0, \\ -\frac{5}{2} < x \leqslant -2, \end{cases} & \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} < x < -2, & \text{(II)} \\ \begin{cases} 2x + 5 - x - 3 < 0, \\ -2 < x \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases} & \Leftrightarrow \quad \varnothing, & \text{(III)} \\ \begin{cases} -2x + 7 - x - 3 < 0, \\ \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{7}{2}, \end{cases} & \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3} < x \leqslant \frac{7}{2}, & \text{(IV)} \\ \begin{cases} 2x - 7 - x - 3 < 0, \\ \frac{7}{2} < x, \end{cases} & \Leftrightarrow \quad \frac{7}{2} < x < 10, & \text{(V)} \end{array}\right.$$

Объединяя решения систем (I)—(V), получаем ответ.

II способ (геометрический). Графики функций $y_1(x) = |x + 2| + 1$ и $y_2(x) = ||2x - 1| - 6|$ изображены на рис 10.

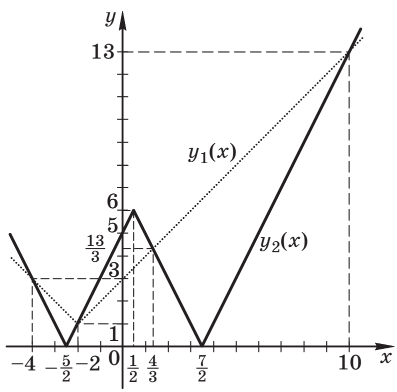


Рис. 10

Нетрудно найти абсциссы точек пересечения графиков. Они определяют границы интервалов, на которых ординаты графика $y_1(x)$ больше ординат графика $y_2(x)$. На чертеже это интервалы $(-4; -2)$ и $\left(\frac{4}{3}; 10\right)$, т. е. получаем тот же самый ответ. Графический метод удобен и для проверки правильности вычислений при реализации алгебраического метода.

б) $\left[-\frac{16}{3}; -\frac{16}{5}\right] \cup \left[\frac{22}{9}; \frac{26}{3}\right]$; в) $\left[-23; -\frac{13}{5}\right] \cup \left[1; \frac{11}{5}\right]$;

г) $\left[-4; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

§ 2. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. а) $\{3; 4\}$; б) $\{-1; 5\}$; в) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$; г) $\left\{-\frac{1}{3}; -3\right\}$; д) $\{1 \pm \sqrt{6}\}$; е) $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{4}\right\}$. **2.** а) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б) $[-1; 4]$; в) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; г) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\varnothing$. **3.** а) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; б) $\{-1; 3\}$; в) $(-\infty; -3] \cup [3; 4)$; г) $[-5; 1] \cup \{5\}$; д) $\varnothing$; е) $\varnothing$; ж) $\{2\} \cup \left[2\frac{161}{163}; 3\right]$.

4. а) 15. ● Используйте тождество $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; б) -22. ● Используйте тождество $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$; в) 127. **6.** $\{1\}$. **9.** $a \in (0; 4)$. ● Воспользуйтесь тем, что $\frac{a^2 - 4a}{2} = x_1x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения, и решите неравенство $\frac{a^2 - 4a}{2} < 0$. **10.** $a \in (-2; 2)$.

11. $k \in (-\infty; -1]$. ▲ Квадратное уравнение имеет действительные корни, если $D = [2(k - 1)]^2 - 4(k + 5) \geqslant 0$. Решением этого неравенства служит объединение лучей: $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$. При этих значениях k корни могут быть оба положительными, иметь разные знаки и оба отрицательными. Найдем значения k, при которых оба корня отрицательны. По теореме Виета имеем систему неравенств $x_1 + x_2 = -2(k - 1) < 0$, $x_1x_2 = k + 5 > 0$; решением последней является луч $[4; +\infty)$. Таким образом, при всех $k \in (-\infty; -1]$ хотя бы один корень уравнения положителен.

12. а) $\left[-\sqrt{\dfrac{40}{7}}; -\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}; \sqrt{\dfrac{40}{7}}\right]$. ▲ Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ будет иметь два корня x_1 и x_2, меньшие некоторого числа x_0, если одновременно будут выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_0, \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} m^2 - 2\cdot 4(m^2 - 5) \geqslant 0, \\ -\dfrac{m}{4} < 1, \\ 2\cdot 1^2 + m\cdot 1 + m^2 - 5 > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему неравенств, получаем ответ;

б) $\left[-\sqrt{\dfrac{40}{7}}; -\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; \sqrt{\dfrac{40}{7}}\right]$. **13.** $(-2; 3)$.

14. $k \in (6; 6{,}75)$. ▲ Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ имеет корни x_1 и x_2, заключенные между числами p и q, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ f(p) > 0, \\ f(q) > 0, \\ p < -\dfrac{b}{2a} < q \end{cases} \text{или} \begin{cases} [2(k-3)]^2 - 4\cdot 9 > 0, \\ (-6)^2 + 2(k-3)(-6) + 9 > 0, \\ 1^2 + 2(k-3)\cdot 1 + 9 > 0, \\ -6 < -(k-3) < 1. \end{cases}$$

Решив эту систему неравенств, получаем ответ. **15.** $k \in (5; 24)$. **16.** $m \in \left[0; \dfrac{4}{61}\right)$. **17.** $m \in (2{,}5; +\infty)$.

18. а) $\{-2; 2\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Решениями уравнения первой системы являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Значение x_1 не удовлетворяет неравенству этой системы, поэтому первая система имеет только одно решение $x = 2$. Аналогично находится решение $x = -2$ второй системы; б) $\varnothing$.

19. а) $\left\{\frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}; \frac{1}{2}; 2\right\}$; б) $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. **20.** а) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$; б) $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$; в) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; г) $\varnothing$. **21.** а) $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$; б) $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$. **22.** а) $\varnothing$; б) $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}\right\}$. **23.** $\left\{-\frac{2}{5}; 2\right\}$.

24. а) $(-4; 4)$. ▲ Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

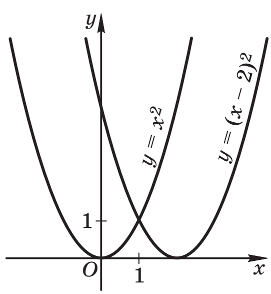
$$\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x - 12 < 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Решениями уравнения первой системы являются значения $x \in [0; 4)$, а второй системы — значения $x \in (-4; 0)$. Объединив эти решения, получим ответ; б) $(-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$; в) $[-5; -2] \cup [2; 5]$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\varnothing$. **25.** а) $\left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{34}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{34}-5}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; б) $[-2; 1]$. **26.** а) $(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$; б) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; в) $[-4; -2]$.

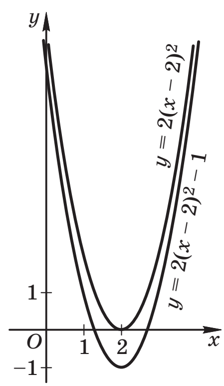
27. а) $(-\infty; 1) \cup (2 + \sqrt{11}; +\infty)$; б) $(-3; 0) \cup (1; 2)$. **28.** а) $(-\infty; -4) \cup \left(-3; \frac{9-\sqrt{465}}{6}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{465}}{6}; +\infty\right)$; б) $\left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right]$. **29.** а) $\{0\}$; б) $[-1; 1]$; в) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; г) $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$; д) $[-4; -1] \cup [0; 4]$; е) $(-3; -1] \cup \{0\} \cup [1; 3)$. **31.** $a \in [5; +\infty)$.

32. а) $3 - \sqrt{8+x}$; б) $3 + \sqrt{8+x}$.

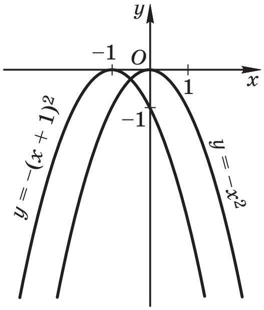
33. а); б).



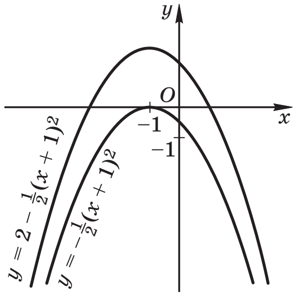
33. в); г).



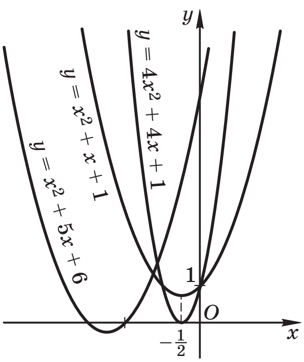
34. а); б).



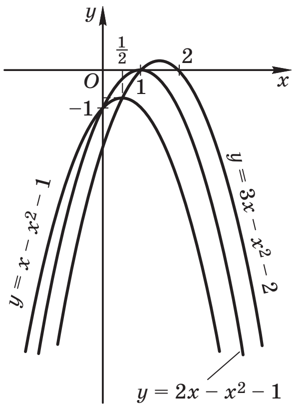
34. в); г).



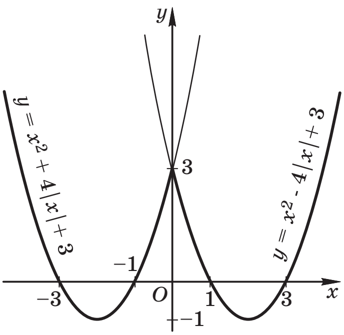
35.



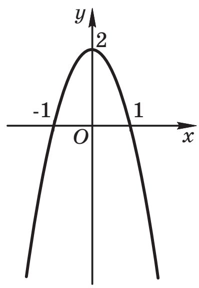
36.



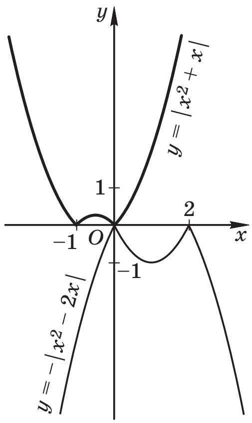
37. а); б).

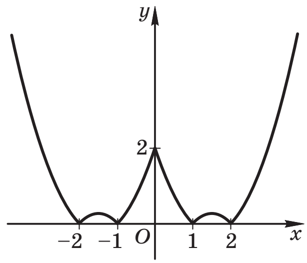


37. в).

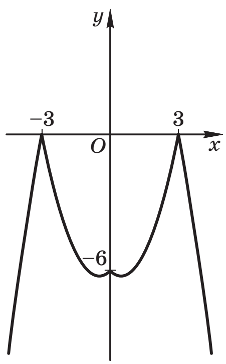


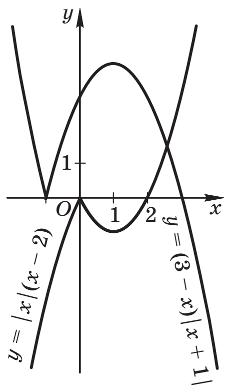
38. **39.** а).

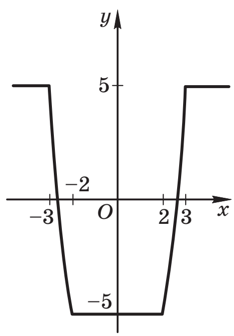




39. б). **40.** **41.**







42. а) $2x - 6$; б) $-2x - 1$; в) $6x + 1$; г) $-8x - \operatorname{tg} 2$; д) $x - \sqrt{3}$; е) $-\frac{2x}{3} + \pi$; ж) $10(5x + 1)$; з) $4 - \frac{x}{2}$; и) $2\,ax$; к) $2(a - 1)x - a$.

43. а) -3; б) 7; в) 0; г) 1. **44.** а) $\operatorname{arctg} 9$; б) $\pi - \operatorname{arctg} 4$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) $\pi - \operatorname{arctg} 13$. **45.** а) $y = 1 - 6x$; б) $y = -3x + 3{,}5$; в) $y = 4$. **46.** $0{,}5$.

47. $(2a;\ 4a^2)$. ▲ Ординатами точек параболы с абсциссами x_1 и x_2 являются $y_1 = a^2$ и $y_2 = 9a^2$. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, имеет вид $\frac{x-a}{3a-a} = \frac{y-a^2}{9a^2-a^2}$, или $y = 4ax - 3a^2$. Таким образом, угловой коэффициент прямой есть $k = 4a$. Дифференцируя функцию $y = x^2$ и полагая $y'(x_0) = 2x_0 = k = 4a$, получаем: $x_0 = 2a$, $y_0 = (2a)^2 = 4a^2$. **48.** $y = 1$. **49.** $y = -8$. **50.** а) $k = 17$; б) $k \in (-\infty;\ 17)$. **51.** а) $\{3\}$; б) $\{2\}$; в) $\{-5\}$; г) $\{5\}$. **52.** а) $\left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right\}$; б) $\left\{-3;\ \frac{1}{4}\right\}$. **53.** а) $\{1;\ 3;\ 5\}$; б) $\{-4;\ -2;\ 0\}$; в) $\{-1\}$. **54.** а) $\left\{-3;\ -2;\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$; б) $[-\sqrt{3};\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ \sqrt{3}]$. **55.** а) $\{1;\ 2\}$; б) $\{1;\ 3\}$; в) $\{2\}$. **56.** а) $(-\infty;\ 1{,}5)$; б) $(-2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ 1)$; г) $(-\infty;\ -2)$, $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 2)$. **57.** а) $(-1{,}5;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2)$; в) $(-\infty;\ -0{,}5)$; г) $\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\ +\infty\right)$. **58.** а) $x = 0$ — точка минимума; б) $x = 0$ — точка максимума; в) $x = 1$ — точка минимума; г) $x = -2$ — точка максимума; д) $x = -1$ — точка минимума; е) $x = \frac{1}{8}$ — точка максимума. **59.** а) Функция точек экстремума не имеет; б) $x = -1{,}5$ — точка минимума;

в) $x = -1$ — точка максимума; $x = 0{,}5$ — точка минимума. ▲ При $x < -1$ имеем $y = -(x-2)(x+1)$, и в этой области $y' = 1 - 2x$, причем $y' > 0$ для всех $x \in (-\infty;\ -1)$; при $x > -1$ имеем $y = (x-2)(x+1)$, $y' = 2x - 1$ и $y' < 0$ для $x \in (-1;\ 0{,}5)$. В точке $x = -1$ производная не существует (точка $x = -1$ — критическая), но в ее окрестности производная существует и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, $x = -1$ — точка максимума; $y'(0{,}5) = 0$ и $y' > 0$ для $x \in (0{,}5;\ +\infty)$, поэтому $x = 0{,}5$ — точка минимума. **60.** а) $x = -1{,}5$ и $x = 1{,}5$ — точки минимума; $x = 0$ — точка максимума; б) $x = 0$ — точка минимума; в) $x = -0{,}5$ — точка минимума. **61.** а) $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ — точки минимума; $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$ — точки максимума; б) $x = -\frac{\sqrt{65}-1}{2}$, $x = 4$ — точки минимума; $x = -0{,}5$ — точка максимума. **62.** а) Функция не имеет точек экстремума; б) $x = 0$ — точка максимума. **63.** а) $y_{\min} = y(1) = 7$, $y_{\max} = y(2) = 15$; б) $y_{\max} = y(2) = -14$, $y_{\min} = y(3) = -29$; в) $y_{\max} = y(-1) = 8$, $y_{\min} = y(1) = 4$; г) $y_{\min} = y(0) = -1$, $y_{\max} = y(3) = 8$.

64. а) $y_{\max} = y(-3) = 10$, $y_{\min} = y(-1) = 2$; б) $y_{\min} = y(1) = -2$, $y_{\max} = y(4) = 2$; в) $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 4$. **65.** ● Докажите, что $x_1 < -\dfrac{b}{2a} < x_2$. **66.** ● Рассмотрите функцию $\varphi(x) = f(x) - A$, у которой x_1 и x_2 являются нулями, и используйте равенство $\varphi'(x) = f'(x)$ и указание к задаче 65. **67.** $0{,}5(x_1 + x_2)$.

68. а) $(-2 + \sqrt{5}\,;\ 2 + \sqrt{3}\,)$. ▲ Раскрыв модули и решив полученные при раскрытии внутреннего модуля квадратные уравнения, приходим к совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}, \\ x^2 + 3x - 3 < x + 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2} < x < \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}, \\ -x^2 - 3x + 3 < x + 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + 3x - 3 < x + 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 3 < x + 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Последовательно преобразуя, имеем

$$\left[\begin{array}{lcl} \begin{cases} x \leqslant \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}, \\ x^2 + 2x - 5 < 0, \end{cases} & \Leftrightarrow & \varnothing, \\ \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2} < x < \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}, \\ x^2 + 4x - 1 > 0, \end{cases} & \Leftrightarrow & -2 + \sqrt{5} < x < \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}, \\ \begin{cases} \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + 2x - 5 < 0, \end{cases} & \Leftrightarrow & \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ \begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 4x - 1 < 0, \end{cases} & \Leftrightarrow & 1 < x < 2 + \sqrt{3}\,. \end{array}\right.$$

Объединив найденные решения, получим ответ.

б) $(-\infty;\ 3 - 2\sqrt{2}\,] \cup [\,1 + 2\sqrt{3}\,;\ +\infty)$; в) $\left(-\dfrac{5+3\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{5-4\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $(-\infty;\ 4 + 2\sqrt{5}\,] \cup [8 + 2\sqrt{14}\,;\ +\infty)$.

69. а) $c = 6$. ▲ Обозначим через x_1 и x_2 корни заданного квадратного уравнения. Тогда, используя условие и теорему Виета, имеем систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 13, \\ x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 x_2 = c. \end{cases}$$

Так как $(x_1 + x_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2$, то из этой системы получаем равенство $25 = 13 + 2c$, откуда $c = 6$. Проверим, что это значение удовлетворяет условию задачи. В самом деле, при $c = 6$ заданное уравнение имеет вид $x^2 + 5x + 6 = 0$. Оно имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = -3$. При этом $x_1^2 + x_2^2 = 4 + 9 = 13$. Поэтому единственным решением является значение $c = 6$.

б) -2; в) ± 1; г) 4.

70. а) $a \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. ▲ Положим $f(x) = x^2 - 2ax + 8a - 15$. Согласно свойствам квадратичной функции, уравнение

$$x^2 - 2ax + 8a - 15 = 0$$

имеет решение на интервале $(1; +\infty)$ в двух случаях:

1) два корня уравнения находятся по разные стороны от единицы;

2) оба корня, возможно, совпадающие, лежат правее единицы.

Первый случай имеет место, если одновременно выполнены условия $D > 0$ и $f(1) < 0$, т. е.

$$\begin{cases} a^2 - 8a + 15 > 0, \\ 1 + 6a - 15 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a-5) > 0, \\ a < \dfrac{7}{3}. \end{cases}$$

Это значит, что $a \in \left(-\infty; \dfrac{7}{3}\right) \cup (5; +\infty)$.

Второй случай имеет место, если одновременно $D \geqslant 0$, $f(1) \geqslant 0$ и абсцисса вершины параболы лежит правее 1, т. е.

$$\begin{cases} (a-3)(a-5) \geqslant 0, \\ 1 + 6a - 15 \geqslant 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a-5) \geqslant 0, \\ a \geqslant \dfrac{7}{3}, \\ a > 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $a \in \left[\dfrac{7}{3}; 3\right] \cup [5; +\infty)$.

Ответом является объединение всех значений параметра a, для которых реализуется и первый, и второй случай, т. е. $a \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$.

б) $b \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$; в) $c \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; г) $d \in (-\infty; 3] \cup$ $\cup [4; +\infty)$.

71. а) -4. ▲ Значения параметра a ($a \in \boldsymbol{R}$), при которых корни уравнения действительны (и, следовательно, возможно их сравнение по величине) находим из условия

$$(2a-1)^2 - 4(a^2+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant -\frac{7}{4}.$$

При искомых значениях параметра a корни x_1 и x_2 данного уравнения имеют вид x_1 и $2x_2$, где $x_1 > 0$. Согласно теореме Виета, $x_1 + x_2 = 3x_1 = -(2a-1)$, $x_1 x_2 = 2x_1^2 = a^2 + 2$, откуда

$$\frac{(2a-1)^2}{9} = \frac{a^2+2}{2} \Leftrightarrow (a+4)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

Значение $a = -4$ удовлетворяет условию $a \leqslant -\frac{7}{4}$ и при $a = -4$ корень $x_1 = -\frac{2a-1}{3}$ положителен. Таким образом, $a = -4$ действительно является решением задачи.

б) 2; $\frac{9}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$; 6; г) $-\frac{6}{19}$; 6.

72. а) $a > 4 + \sqrt{17}$. ▲ Условие существования двух различных положительных корней рассматриваемого уравнения с учетом теоремы Виета приводит к системе неравенств

$$\begin{cases} D = \frac{1}{4}(a^2-1) - 4 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4}(a^2 - 8a - 1) > 0, \\ \frac{a}{2} > 0, \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a - 1 > 0, \\ a > 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4 + \sqrt{17}.$$

Таким образом, решением задачи является множество значений $a > 4 + \sqrt{17}$.

б) $c < 0$; в) $p \in \left(0; \frac{9-\sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{57}}{2}; +\infty\right)$;

г) $q \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

73. а) $a \in \left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$. ▲ Если $a - 3 = 0$, то неравенство принимает вид $-4x + 4 > 0$ и справедливо только при $x < 1$. Таким образом, значение $a = 3$ не принадлежит множеству искомых значений параметра.

Если $a - 3 < 0$, то множество решений данного неравенства либо пусто, либо представляет собой конечный интервал, следовательно, значения $a < 3$ также не принадлежат искомому множеству.

Если $a - 3 > 0$, то значения параметра a, при которых исходное неравенство справедливо для всех x, находим из системы неравенств

$$\begin{cases} a - 3 > 0, \\ D = (a+1)^2 - 4(a-3)(a+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 > 0, \\ (a+1)(13-3a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3, \\ \left[a < -1,\ a > \frac{13}{3}, \right. \end{cases}$$

т. е. $a > \frac{13}{3}$. Нарушение исходного неравенства при каком-либо единственном значении $x = x_0$ возможно лишь в случае, когда $D = 0$, откуда получаем $a = \frac{13}{3}$ (напомним, что $a > 3$). При этом, очевидно, $x_0 = \left.\frac{a+1}{2(a-3)}\right|_{a=\frac{13}{3}} = 2$.

Мы видим, что исключительное значение $x_0 = 2$ совпадает с данным значением $x = 2$. Поэтому искомое множество значений параметра a является объединением двух множеств:

$$a > \frac{13}{3} \text{ и } a = \frac{13}{3}.$$

Итак, искомым множеством значений параметра является промежуток $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$.

б) $b \in \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$; в) $c \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; г) $d \in \left[\frac{13}{9}; +\infty\right)$.

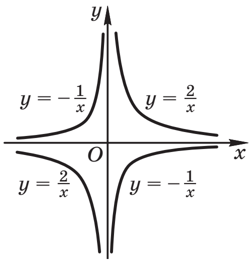
74. $a = 2$. **75.** $a \in \left(2; \frac{9}{4}\right]$.

§ 3. ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

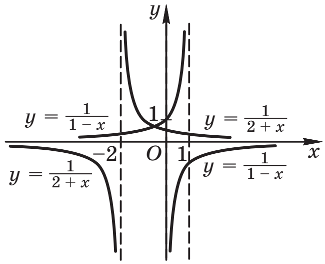
1. а) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$; б) $\varnothing$; в) $\left\{\frac{4}{a-2}\right\}$ при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $\varnothing$ при $a = 0$; г) $\left\{\frac{1}{a+2}; -\frac{1}{a+2}\right\}$ при $a \in (0; +\infty)$; $\varnothing$ при $a \in (-\infty; 0]$. **2.** а) $\{-2\}$; б) $\varnothing$; в) $\{-1; 3\}$; г) $\left\{\frac{a+3}{2}\right\}$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$; $\varnothing$ при $a \in \{-1; 3\}$ **3.** а) $(0;1)$; б) $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; г) $[-3{,}5; -3)$; д) $(1 + a; 1)$ при $a \in (-\infty; 0)$, $\varnothing$ при $a \in \{0\}$, $(1; 1 + a)$ при $a \in (0; +\infty)$; е) $(-\infty; -1) \cup (-1 - a; +\infty)$ при $a \in (-\infty; 0)$; $(-\infty; -1) \cup$ $\cup (-1; +\infty)$ при $a \in \{0\}$, $(-\infty; -1 - a] \cup (-1; +\infty)$ при $a \in (0; +\infty)$. **4.** а) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; б) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **5.** а) $[1; 4) \cup (4; +\infty)$. ● Разложите числитель дроби на множители; б) $(-\infty; -3) \cup \left(-3; -\frac{1}{3}\right)$.

6. а) $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{8}{7}; 2\right) \cup (2; +\infty)$. ▲ Так как обе части неравенства положительны, то при $x \neq 0{,}5$ и $x \neq 2$ оно равносильно неравенству $\frac{|x-2|}{2} < \frac{|2x-1|}{3}$. Возведя последнее неравенство в квадрат и перенеся все члены в левую часть, после преобразований (применив формулу для разности квадратов) получаем неравенство $(7x - 8)(x + 4) > 0$, решая которое находим ответ; в) $\left(-\infty; \frac{11}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. ● Положите $\frac{|x-2|}{|x-3|} = y$, $y \geqslant 0$; г) $(-\infty; 2)$ при $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, $(2; +\infty)$ при $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$; $\varnothing$ при $a \in \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

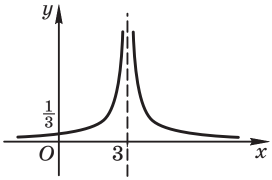
7. а); б).



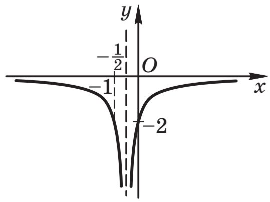
7. в); г).



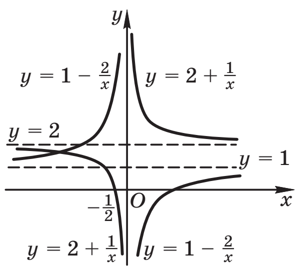
8. а).



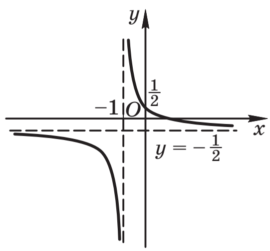
8. б).



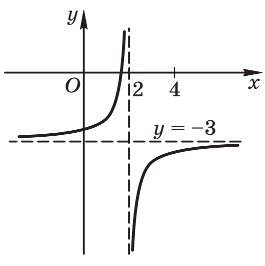
9. а); б).



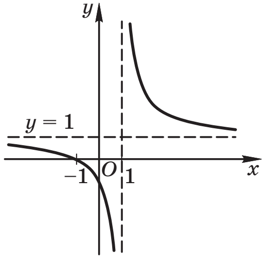
9. в).



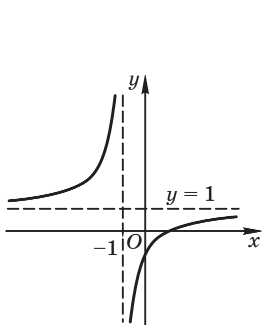
9. г).



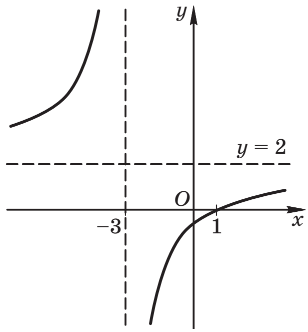
10. а).



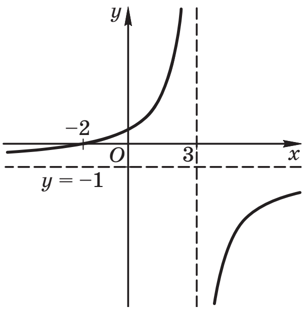
10. б).



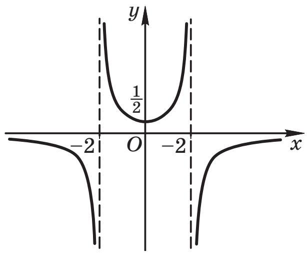
10. в).



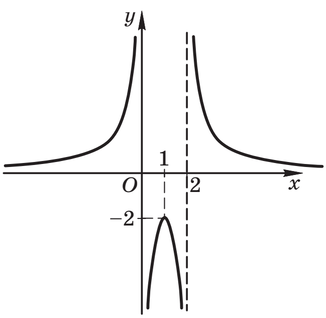
10. г).



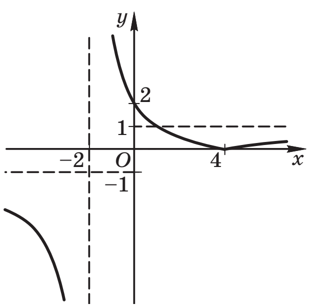
11. а).



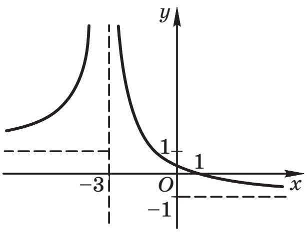
11. б).



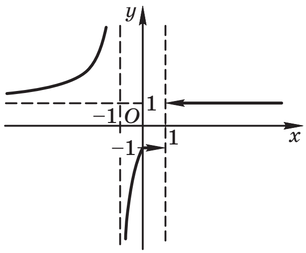
12. а).



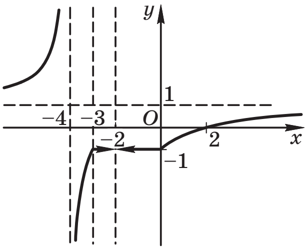
12. б).



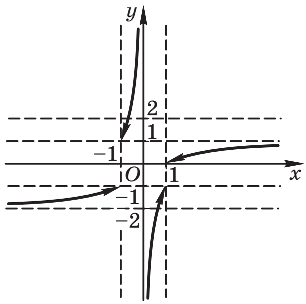
13. а).



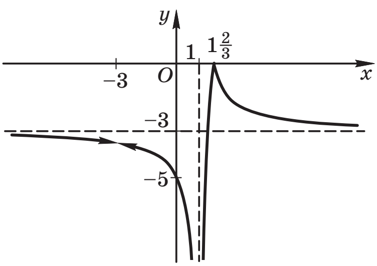
13. б).



14. а).



14. б).



15. а) $-\dfrac{1}{x^2}$; б) $\dfrac{2}{x^2}$; в) $-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$; г) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$; **16.** а) $\dfrac{2}{(x+2)^2}$; б) $-\dfrac{2}{(2x-1)^2}$; в) $\dfrac{5}{(x+1)^2}$; г) $-\dfrac{11}{(1-3x)^2}$. **17.** а) −3; б) $\dfrac{1}{4}$; в) −1; г) −1. **18.** а) $\dfrac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{9}$; в) $\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{9}$; г) $\pi - \operatorname{arctg} 4$; д) $\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{4}$;

е) $\pi - \operatorname{arctg} 6$. **19.** а) $x - 3y - 6 = 0$; б) $y + x = 0$; в) $4y - 5x + 6 = 0$; г) $36y + 29x - 23 = 0$. **20.** а) $M_1(0; -1)$; $M_2(-2; 3)$; б) $M_1\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$; $M_2\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$. ● Используйте условие перпендикулярности прямых $k_1k_2 = -1$, где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты. **21.** ● Покажите, что $y'(0) = y'(4)$. **22.** $y + x = 0$; $x + 25y = 0$. ▲ Уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $y = kx$. Пусть $M(x_0; y_0)$ — точка гиперболы, через которую проходит касательная. Тогда $k(x_0) = \frac{x_0 + 9}{x_0 + 5}$ и $k = y'(x_0) = -\frac{4}{(x_0 + 5)^2}$. Исключая из этих уравнений k, получаем уравнение $x_0^2 + 18x_0 + 45 = 0$, откуда найдем $x_{01} = -15$, $x_{02} = -3$ и соответственно $k_1 = -\frac{1}{25}$ и $k_2 = -1$. **23.** ● Исследуйте знак производной на интервале $(x_1; x_2)$ и покажите, что $y'(x_0) \neq 0$ для любого $x_0 \in (x_1; x_2)$. **24.** а) $y_{\min}(0) = -3$, $y_{\max}(2) = -\frac{1}{3}$; б) $y_{\max}(-1) = \frac{1}{3}$; $y_{\min}(1) = -3$. **25.** $x_0 = \sqrt{x_1x_2}$, если $x_1 > 0$, и $x_0 = -\sqrt{x_1x_2}$, если $x_2 < 0$.

§ 4. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

1. а) $\{-3; -1; 1\}$; б) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; в) $\{-3\}$; г) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; д) $\{1\}$; е) $\{-2\}$; ж) $\{-1\}$; з) $\{2\}$; и) $\{-1\}$; к) $\{1\}$. ● а) — к). Разложите левую часть уравнения на множители.

2. ▲ Пусть $x_1 = \frac{p}{q}$, где $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$ и p, q — взаимно простые числа. Тогда

$$\frac{p^3}{q^3} + a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c = 0, \text{ или } p(p^2 + apq + bq^2) = -cq^3. \qquad (1)$$

Правая часть равенства (1) кратна q. Левая часть будет делиться на q тогда и только тогда, когда $q \equiv 1$, так как $p^2 + apq + bq^2$

на q не делится (два слагаемых кратны q, а третье p^2 — нет). Таким образом, равенство (1) имеет вид $p(p^2 + ap + b) = -c$, а отсюда следует, что c кратно $p = x_1$.

3. а) $\{-2; -1; 1\}$. ▲ Свободный член данного уравнения равен -2, поэтому рациональными корнями могут быть лишь числа ±1; ±2. Подставляя $x = 1$ в уравнение, получаем $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0$, т. е. 1 — корень уравнения. Разлагая теперь левую часть на множители, имеем

$$x^3 - 1^3 + 2x^2 - 2 \cdot 1^2 - x + 1 =$$
$$= (x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)(x+1) - (x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 + 3x + 2) = 0.$$

Решив уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$, найдем другие корни исходного уравнения;

б) $\{-3; 2\}$. ***Замечание.*** Данное уравнение имеет два равных корня: $x = 2$. Такие корни называют *кратными*. Корень $x = 2$ — корень кратности 2;

в) $\{3\}$; г) $\{1\}$; д) $\left\{-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$. ● Положите $x = -\frac{1}{y}$; е) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. ● Умножьте уравнение на 4 и положите $2x = y$. **4.** ● Используйте тождество $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$. **5.** $-2p$.

6. $\left\{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}+3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\right\}$. ▲ Положим $x = y - \frac{1}{y}$. Тогда уравнение примет вид

$$y^3 - \frac{1}{y^3} - 3\left(y - \frac{1}{y}\right) + 3\left(y - \frac{1}{y}\right) - 3 = 0, \text{ или } y^3 - \frac{1}{y^3} - 3 = 0.$$

Полагая теперь $y^3 = t$, придем к уравнению $t^2 - 3t - 1 = 0$. Последнее имеет корни $t_1 = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$, $t_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ $(t_1 t_2 = -1)$. Отсюда получим $y_1 = \sqrt[3]{t_1}$ и $x_1 = \sqrt[3]{t_1} - \frac{1}{\sqrt[3]{t_1}} = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}} =$
$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}+3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}$.

Проверьте самостоятельно, что $x_2 = \sqrt[3]{t_2} - \frac{1}{\sqrt[3]{t_2}} = x_1$.

7. а) $\{-3; -2; 1; 3\}$; б) $\{-5; -2; 1; 2\}$; в) $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$; г) $\varnothing$; д) $\{-2; 1; 2; 4\}$.

● Разложите левую часть уравнения на множители; е) $\{-5; -2\}$. ● Многочлен $x^4 + 11x^2 + 10$ разложите на два множителя. **8.** ● См. решение задачи 2. **9.** а) $\{-5; -1; 1; 3\}$; б) $\{2; 6\}$; в) $\{-1\}$; г) уравнение не имеет рациональных корней; д) $\left\{-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$.

● Положите $x = -\frac{1}{y}$. **10.** а) $\left\{-\sqrt{2};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right\}$. ● Положите $x^2 = y$; б) $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. **11.** а) $\{-1; 1\}$; б) $\{2\}$. ▲ Полагая

$$2x - 3 = y + c, \quad (1)$$

$$2x - 5 = y - c, \quad (2)$$

получаем уравнение

$$(y + c)^4 + (y - c)^4 = 2. \quad (3)$$

Постоянная c определяется из уравнений (1) и (2): $c = 1$. После преобразований уравнение (3) примет вид $y^4 + 6y^2 = 0$. Оно имеет единственный корень $y = 0$. Далее имеем $2x - 3 = 1$, $x = 2$. ***Замечание.*** Уравнения вида $(ax + b_1)^4 + (ax + b_2)^4 = k$ подстановкой $ax + b_1 = y + c$, $ax + b_2 = y - c$, где $c = \frac{b_1 - b_2}{2}$, сводятся к биквадратным.

12. а) $\{-1 - \sqrt{7};\ -1 - \sqrt{2};\ -1 + \sqrt{2};\ \sqrt{7} - 1\}$. ● Положите $x^2 + 2x = y$; б) $\left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}$.

13. а) $\left\{\frac{-a(1 + \sqrt{13})}{2};\ \frac{a(\sqrt{13} - 1)}{2}\ \middle|\ a \in \boldsymbol{R}\right\}$. ● Положите $x^2 + ax = y$; б) $\left\{\frac{-5 - \sqrt{21}}{6};\ \frac{\sqrt{21} - 5}{6}\right\}$.

14. а) $\{-\sqrt{2};\ 4 - 3\sqrt{2};\ 4 + 3\sqrt{2}\}$. ▲ Положим $x - \frac{2}{x} = y$. Тогда $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 = y^2$, откуда $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 + 4$.

Теперь исходное уравнение примет вид $y^2 - 8y = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 0$, $y_2 = 8$. Решая далее уравнения $x - \frac{2}{x} = 0$, $x - \frac{2}{x} = 8$, которые сводятся к квадратным, получаем ответ;

б) $\left\{-\frac{3}{2};\ -\frac{1+\sqrt{7}}{4};\ \frac{\sqrt{7}-1}{4};\ 1\right\}$. ● Разделите уравнение на x^2 и положите $2x - \frac{3}{x} = y$;

в) $\left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$. ● Сократите дробь в левой части уравнения на $x + 1$;

г) $\left\{-1;\ 9;\ \frac{5-\sqrt{61}}{2};\ \frac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$. ● Разделите уравнение на x^2 и положите $x - \frac{9}{x} = y$.

15. а) $\left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2};\ \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$. ▲ Вычитая из обеих частей уравнения $\frac{10x^2}{x+5}$, после преобразований получаем $\frac{x^2}{(x+5)^2} + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0$. Пусть $\frac{x^2}{x+5} = y$, тогда $y^2 + 10y - 11 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -11$. Таким образом, имеем два уравнения: $\frac{x^2}{x+5} = 1$ и $\frac{x^2}{x+5} = -11$, решив которые получим ответ (второе уравнение не имеет действительных корней); б) $\{-1 - \sqrt{7};\ \sqrt{7} - 1\}$. ● Приведите уравнение к виду $\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6\frac{x^2}{x-3} - 16 = 0$ и положите $\frac{x^2}{x-3} = y$.

16. а) $\left\{-\frac{1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $(x^2 + 1)^2 - 2(x - 1)^2 = 0$;

б) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1};\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}\right\}$. ● Положите $x = \frac{1}{y}$;

в) $\{-9;\ 11\}$. ● Прибавьте к обеим частям уравнения $4x^2 + 400x + 1$.

17. а) $\{-a;\ a-\sqrt{a^2+2};\ a+\sqrt{a^2+2}\ |\ a\in \boldsymbol{R}\}$. ▲ Решим данное уравнение относительно a. Имеем

$$a=\frac{-(x^2+2)+(3x^2-2)}{4x}=\frac{x^2-2}{2x}, \qquad (1)$$

или

$$a=\frac{-(x^2+2)-(3x^2-2)}{4x}=-x. \qquad (2)$$

Решив теперь уравнения (1) и (2) относительно x, получим ответ;

б) $\{-1-\sqrt{3+a};\ -1+\sqrt{3+a}\}$ при $a\in[-3;-1)$, $\{-1-\sqrt{3+a};$ $\sqrt{3+a}-1;\ -1-\sqrt{1+a};\ \sqrt{1+a}-1$ при $a\in[-1;+\infty)$, $\varnothing$ при $a\in$ $\in(-\infty;-3)$. ▲ Решим данное уравнение относительно a, считая x параметром: $a^2-2(x^2-1)a+x^4-6x^2+4x=0$;

$$a=x^2+2x-2 \qquad (1)$$

или

$$a=x^2-2x. \qquad (2)$$

Решив уравнения (1) и (2) относительно x, получаем $x_{1,\,2}=$ $=-1\pm\sqrt{3+a}$, $x_{3,\,4}=-1\pm\sqrt{1+a}$. Корни x_1 и x_2 будут действительными, если $a\in[-3;+\infty)$, а x_3 и x_4 — если $a\in[-1;+\infty)$.

18. $\left\{\frac{1-\sqrt{29}}{2};\ \frac{5-\sqrt{17}}{2};\ \frac{1+\sqrt{29}}{2};\ \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$. ▲ Представим левую часть уравнения в виде

$$(x^2+ax+c)(x^2+bx+d)=0,$$

или

$$x^4+(a+b)x^3+(ab+c+d)x^2+(bc+ad)x+cd\equiv$$
$$\equiv x^4-4x^3-10x^2+37x-14.$$

Имеем систему

$$a+b=-4,\ ab+c+d=-10,\ bc+ad=37,\ cd=-14. \qquad (1)$$

Так как a, b, c, d — целые числа, то из последнего уравнения системы (1) следует, что либо $c=-1$, $d=14$, либо $c=2$, $d=-7$. Системе (1) удовлетворяет вторая пара значений c и d; при этих значениях для других коэффициентов получаются значения $a=$ $=-5$, $b=1$. Решив теперь уравнения $x^2-5x+2=0$ и $x^2-x-7=$ $=0$, найдем корни исходного уравнения.

19. а) $(-2;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. ▲ При $x \in (3;\ +\infty)$ все сомножители, входящие в произведение, положительны, следовательно, $p(x) = (x+2)(x-1)(x-3) > 0$ при всех $x \in (3;\ +\infty)$. При $x \in (1;\ 3)$ сомножитель $x - 3$ отрицателен (один), а каждый из сомножителей $(x-1)$ и $(x+2)$ положителен, поэтому $p(x) < 0$ при $x \in (1;\ 3)$. При $x \in (-2;\ 1)$ имеются два отрицательных сомножителя $(x-3)$ и $(x-1)$ и один положительный $(x+2)$; значит, $p(x) > 0$ при $x \in (-2;\ 1)$. При $x \in (-\infty;\ -2)$ все три сомножителя отрицательны, поэтому $p(x) < 0$ на этом промежутке. Объединяя промежутки, где $p(x) > 0$, получаем ответ; б) $(-2;\ 0) \cup (1;\ 2)$; в) $[-4;\ -2] \cup \{1\}$; г) $(-3;\ 2)$ при $n = 2k - 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, $(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 2)$ при $n = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$.

20. а) $(-3;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -2] \cup \{-1\}$; в) $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

21. а) $(-\infty;\ -1] \cup \{1\} \cup [2;\ +\infty)$; б) $(-5;\ -1)$. **22.** а) $(-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$; б) $\left(2 - \frac{4}{\sqrt{3}};\ 1\right) \cup \left(3;\ 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. ● Положите $x - 2 = y$.

23. а) $(-\infty;\ +\infty)$. ● Положите $x^2 - x = y$;

б) $\left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2};\ \frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)$. ● Положите $x^2 + 3x + 1 = y$.

24. а) $\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{3 + 2\sqrt{3}};\ 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}\right)$. ▲ Исходное неравенство равносильно неравенству $p(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 < 0$. Разложим многочлен в левой части неравенства на множители, для этого решим уравнение $p(x) = 0$. Так как $x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению, то оно равносильно уравнению $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$. Полагая теперь $x + \frac{1}{x} = y$, получаем уравнение $y^2 - 4y - 8 = 0$, корни которого $y_1 = 2(1 + \sqrt{3})$ и $y_2 = 2(1 - \sqrt{3})$. Теперь многочлен $p(x)$ представим в виде

$$(x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + 1)(x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 1).$$

Здесь $x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 1 > 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + 1 > 0$, решение которого приведено в ответе;

б) $\left(-1-\sqrt{3};\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\sqrt{3}-1;\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. ● При разложении левой части неравенства на множители используйте подстановку $y = x - \dfrac{2}{x}$.

25. ▲ Имеем

$$p(x) = (x-1)\,x[x^4(x^2+x+1)+1]+1 \qquad (1)$$

или

$$p(x) = (x-1) + x^2\,(1-x^3) + x^8. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что $p(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$, а из (2) — что $p(x) > 0$ при $x \in (0;\ 1)$. Таким образом, $p(x) > 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$.

26. ▲ Функция $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ определена на всей числовой прямой, за исключением точек x_k, $k \in \boldsymbol{N}$, $k \leqslant n$, являющихся нулями многочлена $Q(x)$. Пусть x_0 — одно из решений неравенства $f(x) > 0$. Тогда $P(x_0)$ и $Q(x_0)$ — числа одного знака и, следовательно, $\varphi(x_0) = P(x_0)Q(x_0) > 0$, т. е. x_0 является также одним из решений неравенства $\varphi(x) = P(x)Q(x) > 0$. (Если $x = x_k$, то $\varphi(x_k) = 0$ и значения x_k не удовлетворяют неравенству $\varphi(x) > 0$.) Таким образом, все решения неравенства $f(x) > 0$ являются решениями неравенства $\varphi(x) > 0$ (в силу произвольности выбора числа x_0). Аналогично можно доказать, что если x_0 — некоторое решение неравенства $\varphi(x) > 0$, то это же число x_0 будет и решением неравенства $f(x) > 0$ ($P(x_0)$ и $Q(x_0)$ — числа одного знака). Если $P(x)$ и $Q(x)$ при всех x из области определения функции $f(x)$ принимают значения разных знаков, то неравенства $f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$ решений не имеют, т. е. эти неравенства также равносильны.

27. а) $(-2;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$. ▲ Неравенство $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+2}{x(x-2)} > 0$ равносильно неравенству $(x+2)(x-2)x > 0$, решив которое методом интервалов получим ответ; б) $(-1;\ 2)$; в) $(-\infty;\ -1) \cup$ $\cup \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right] \cup (1;\ 2)$; г) $\left(1;\ \dfrac{5}{3}\right) \cup \left(2;\ \dfrac{7}{3}\right) \cup (3;\ +\infty)$. ● Приведите левую часть неравенства к виду $x + \dfrac{1}{x-1} + x + \dfrac{1}{x-3}$; д) $(-2;\ -1) \cup$

$\cup$ [0; 1] $\cup$ [2; $+\infty$); е) $(-7; -\sqrt{37}) \cup (-5; 0) \cup (5; \sqrt{37}) \cup (7; +\infty)$.
28. а) (−1; 0). ● Положите $x^2 + x = y$;

б) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; 3) \cup (4; 6) \cup (7; +\infty)$. ▲ Преобразуем левую часть неравенства:

$$\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-4}\right) + 4\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = \frac{4}{x^2-5x+6} - \frac{3}{x^2-5x+4}.$$

Полагая теперь $x^2 - 5x + 5 = y$, получаем после преобразований неравенство $\frac{y^2-30y+209}{(y-1)(y+1)} > 0$, равносильное неравенству $(y + 1)(y - 1)(y - 11)(y - 19) > 0$; решением последнего служит $(-\infty; -1) \cup (1; 11) \cup (19; +\infty)$. Решив далее совокупность неравенств

$$x^2 - 5x + 5 < -1,\ 1 < x^2 - 5x + 5 < 11 \text{ и } x^2 - 5x + 5 > 19,$$

получим ответ; в) $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; 4\right)$. **29.** а) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$;

б) [−2; 1]. ● а), б). См. решение задачи 15. **30.** а) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

● Преобразуйте левую часть неравенства к виду $\dfrac{\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^2}{x+\frac{1}{x}}$ и положите $x + \frac{1}{x} = y$;

б) $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty\right]$.

● Положите $x - \frac{1}{x} = y$.

31. $(-\infty; -6) \cup \left(\frac{6-6\sqrt{26}}{5}; -4\right) \cup (-4; 0) \cup \left(6; \frac{6+6\sqrt{26}}{5}\right)$.

● Представьте правую часть неравенства в виде $\frac{x-6}{x+6} + \frac{x+6}{x-6}$.

32. а) $[0; \sqrt{2}]$; б) $[-1 - 2\sqrt{2}; -3) \cup (1; 3]$. **33.** а) $3x^2 - 12x$; б) $\frac{1}{3} - 3x^2$; в) $4x^3 - 6$; г) $3x^2 - 2x^3$. **34.** а) $3x^2 + 2x + 3$; б) $3x^2 - 8x + 3$; в) $4x^3 + 9x^2 + 14x + 7$; г) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) + x(x - 2)(x - 3) + x(x - 1)(x - 3) + x(x - 1)(x - 2)$. **35.** а) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; б) $\frac{x^2-2x-2}{(2+x^2)^2}$;

в) $\frac{2x^3+9x^2-3}{(x+3)^2}$; г) $\frac{2x^4+4x^3-4x+4}{(x+1)^3}$; д) $\frac{2x^3-9x^2-24x+7}{(x-4)^2}$;

е) $\frac{3x^2+1}{(1-x)^2}$. **36.** а) $-90(2-3x)^{29}$; б) $32\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)\left(6x^2-\frac{4}{x}+1\right)^7$;

в) $-8x\,\frac{x^2+1}{(x^2-1)^3}$; г) $8(4x^3-3x^2+10x)(x^4-x^3+5x^2-2)^7$. **37.** а) 12;

б) 0; в) 60; г) 7; д) 0. **38.** а) $\frac{1}{2}$; б) $15a^2+\frac{2}{a^3}-1$; в) $-\frac{1}{1+a^2}$; г) 0;

д) $(-1)^n\, n!$. **39.** а) $y=-x$; б) $y-2=0$; в) $y=-3x+5$; г) $y=-11x-7$;

д) $y=44x-84$; е) $y=2x-2$; ж) $y=-4x+7$. **40.** $(-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$ и

$(\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$. **41.** $\left(-2;\ \frac{52}{3}\right)$ и $\left(5;\ -\frac{197}{6}\right)$. **42.** (1; 0) и (−1; −4).

43. (3; 9). **44.** (0; 1). **45.** ● Покажите, что неравенство $5x^4+8>0$

выполняется для любого $x\in\boldsymbol{R}$. **46.** а) $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$; б) $\{\sqrt[3]{3}\}$; в) функция критических точек не имеет; г) $\left\{-2;\ -\frac{4}{9}\right\}$; д) $\{-1;\ 0\}$; е) $\{\sqrt{3}\}$.

47. а) $\{2\}$; б) $\{-3;\ -2;\ 1\}$; в) $\{0\}$; г) $\{-1;\ 0;\ 1\}$; д) $\{0\}$. **48.** а) $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$;

б) $(-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$; в) $\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; г)$\{-1;\ 1)$; д) $\{2\}$. **49.** а) $(-2;\ 1)$;

б) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)$; в) $(-\sqrt{12};\ 0)$ и $(0;\ \sqrt{12})$; г) $(-\sqrt{2};\ -1)$ и $(-1;\ \sqrt{2})$.

50. а) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$ и $(3;\ +\infty)$; б) $(1;\ 3)$; в) $(0;\ +\infty)$; г) $(-2-\sqrt{3};\ -1)$ и

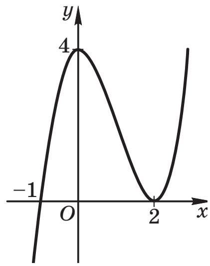
$(-1;\ \sqrt{3}-2)$; д) $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$. **51.** а) $x=-5$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума; б) функция точек экстремума не имеет; в) $x=\frac{1}{3}$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума; г) $x=-\frac{5}{4}$ — точка минимума; д) $x=-3$ и $x=4$ — точки минимума, $x=\frac{1}{2}$ — точка максимума; е) $x=1$ — точка минимума;

ж) $x=0$ — точка минимума. **52.** $8\sqrt{2}$. **53.** а) $y_{\min}=y(-1)=-13$,

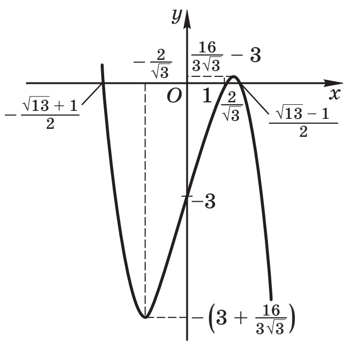
$y_{\max}=y(0)=-3$; б) $y_{\min}=y(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$, $y_{\max}=y(1)=5$; в) $y_{\min}=$

$= y\left(\frac{1}{4}\right) = -8\frac{139}{256}$, $y_{\max} = y(2) = 64$; г) $y_{\min} = y(-1) = -7$, $y_{\max} =$ $= y(1) = 5$; д) $y_{\min} = y(-2) = \frac{8}{3}$, $y_{\max} = y(-1) = 3$.

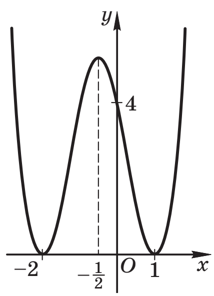
54. На интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает; на интервале $(0;\ 2)$ — убывает; $x =$ $= 0$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; $y(0) = 4$, $y(2) = 0$.

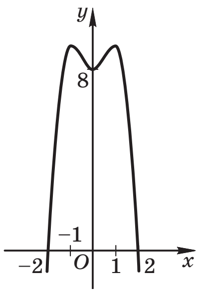


55. На интервалах $\left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$ функция убывает; на интервале $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ — возрастает; $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ — точка минимума, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ — точка максимума; $y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -3 - \frac{16}{3\sqrt{3}}$, $y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) =$ $= -3 + \frac{16}{3\sqrt{3}}$.

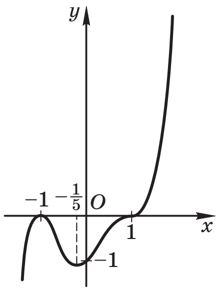


56. На интервалах $(-\infty;\ -2)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ 1\right)$ функция убывает, на интервалах $\left(-2;\ -\frac{1}{2}\right)$ и $(1;\ +\infty)$ — возрастает; $x = -2$ и $x = 1$ — точки минимума, $x = -\frac{1}{2}$ — точка максимума; $y(-2) = y(1) = 0$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{16}$.

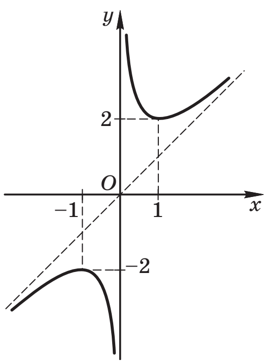




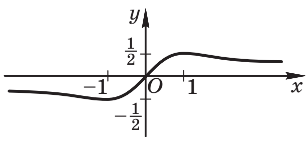
57. На интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ 1)$ функция возрастает, на интервалах $(-1;\ 0)$ и $(1;\ +\infty)$ — убывает; $x = -1$ и $x = 1$ — точки максимума, $x = 0$ — точка минимума; $y(-1) = y(1) = 9$, $y(0) = 8$.



58. На интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $\left(-\frac{1}{5};\ +\infty\right)$ функция возрастает, на интервале $\left(-1;\ -\frac{1}{5}\right)$ — убывает; $x = -1$ — точка максимума, $x = -\frac{1}{5}$ — точка минимума; $y(-1) = 0$, $y\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{864}{3125}$.

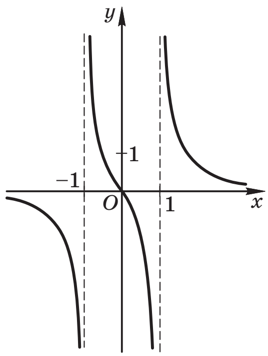


59. На интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ функция возрастает, на интервалах $(-1;\ 0)$ и $(0;\ 1)$ — убывает; $x = -1$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума; $y(-1) = -2$, $y(1) = 2$.

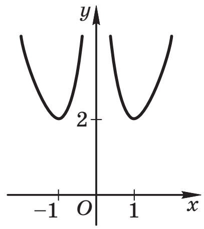


60. На интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ функция убывает, на интервале $(-1;\ 1)$ — возрастает; $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума; $y(-1) = -\frac{1}{2}$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

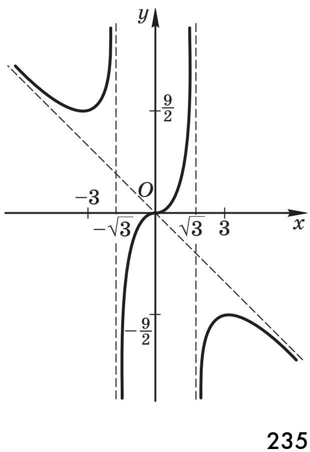
61. Функция убывает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$.

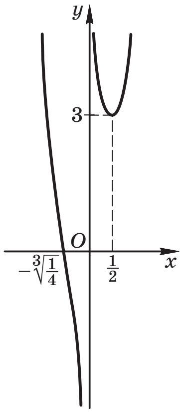


62. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ функция убывает, на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ возрастает; $x = -1$ и $x = 1$ — точки минимума; $y(-1) = y(1) = 2$.

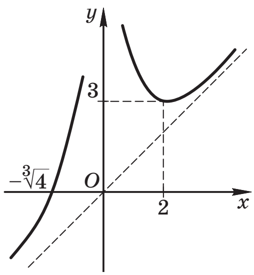


63. На интервалах $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$ функция убывает, на интервалах $(-3; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; 3)$ — возрастает; $x = -3$ — точка минимума, $x = 3$ — точка максимума; $y(-3) = 9$, $y(3) = -9$.





64. На интервалах $(-\infty; 0)$ и $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ функция убывает, на интервале $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — возрастает; $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума; $y\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.



65. На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(0; 2)$ — убывает; $x = 2$ — точка минимума; $y(2) = 3$.

66. а) 4. ▲ Положим

$$a = \sqrt[3]{30 + \sqrt{899\frac{26}{27}}},\ b = \sqrt[3]{30 - \sqrt{899\frac{26}{27}}}.$$

Требуется найти $x = a + b$. Заметим, что сумма кубов $a^3 + b^3 = 60$, а произведение

$$ab = \sqrt[3]{\left(30 + \sqrt{899\frac{26}{27}}\right)\left(30 - \sqrt{899\frac{26}{27}}\right)} = \sqrt[3]{900 - 899\frac{26}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$x^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 60 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x = 60 + x.$$

Таким образом, искомая величина x является корнем кубического уравнения $x^3 - x - 60 = 0$. Один из корней этого уравнения можно легко найти: $x = 4$. Поэтому разложим многочлен $P_3(x) = x^3 - x - 60$ на множители: $P_3(x) = (x - 4)(x^2 + 4x + 15)$. Поскольку квадратный трехчлен $x^2 + 4x + 15$ не имеет действительных корней, условию задачи удовлетворяет только $x = 4$.

б) 5; в) 3; г) 6; д) 4.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1. а) $\{(0;\ 0)\}$; б) $\left\{\left(c;\ \frac{c}{2}\right) \middle|\ c \in \boldsymbol{R}\right\}$; в) $\{(c_1;\ c_2) \mid c_1 \in \boldsymbol{R},\ c_2 \in \boldsymbol{R}\}$; г) $\{(c;\ 0) \mid c \in \boldsymbol{R}\}$; д) $\varnothing$. **2.** а) $\{(1;\ -1)\}$; б) $\left\{\left(\frac{3}{4} + 2c;\ c\right) \middle|\ c \in \boldsymbol{R}\right\}$; в) $\varnothing$; г) $\left\{\left(c;\ 4c - \frac{1}{2}\right) \middle|\ c \in \boldsymbol{R}\right\}$ при $a \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$ и $\varnothing$ при $a \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
3. а) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$; б) $k \in \boldsymbol{R}$; в) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ +\infty)$.
4. а) $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$; б) $\{1\}$; в) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **5.** $\{(0;\ 0)\}$.

6. $\left\{\left(0;\ 0;\ \frac{9}{4}\right);\ (2;\ -1;\ 1)\right\}$. ▲ Подставляя в систему решение $(1;\ 3)$ и учитывая необходимое условие неопределенности системы уравнений, получаем систему относительно a, b и c:

$$\begin{cases} a - 3b = 2a - b, \\ c + 1 + 3c = 10 - a + 3b, \\ \dfrac{a}{c+1} = -\dfrac{b}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b, \\ 4c = 9 + 5b, \\ b(c - 1) = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $\left(0;\ 0;\ \frac{9}{4}\right)$ и $(2;\ -1;\ 1)$. Проверкой убеждаемся, что при этих значениях a, b и c выполняется условие $\dfrac{a}{c+1} = \dfrac{-b}{c} = \dfrac{2a - b}{10 - a + 3b}$ (во втором уравнении системы коэффициенты отличны от нуля), т. е. выполняется достаточное условие неопределенности исходной системы уравнений.
7. а) $\{3\}$; б) $\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

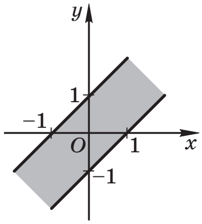
8. $\{(-2;\ -7)\}$. ▲ Вторая система имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$. Поэтому системы окажутся равносильными, если первая система будет иметь единственное решение $(x_0;\ y_0)$. Найдем это решение. Так как $x_0 + y_0 = 3$ и $x_0 + 3y_0 = 3$, то из системы этих уравнений следует, что $x_0 = 3$, $y_0 = 0$. Подставив найденные значения в первое уравнение второй системы, получим $a^2 = 4$.

Следовательно, $a_1 = -2$ и $a_2 = 2$. Подстановка $a_1 = -2$, $x = 3$, $y = 0$ в первое уравнение первой системы дает $-2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = b + 1$, $b = -7$. Значение $a = 2$ не подходит, так как в этом случае первая система уравнений имеет бесчисленное множество решений. **9.** $(-2; 4)$. **10.** $(-1 - \sqrt{3}\,; +\infty)$. **11.** $\{(-1; 4)\}$. ● Положите $\frac{1}{2x + y - 1} = u$ и $\frac{1}{x + 2y - 3} = v$. **12.** а) $\left\{(3; 1); \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right); (-9; -5); \left(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}$; б) $\{(-3; -2); (-2; -3); (3; 2); (2; 3)\}$.

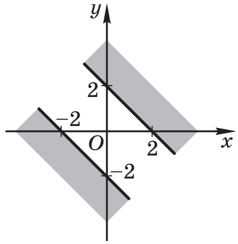
13. $\{(30; 10)\}$. ▲ Пусть дано уравнение $ax + by = c$, где a, b, c — целые числа, причем a и b — взаимно простые, и требуется найти все целые x и y, удовлетворяющие этому уравнению. Предположим, что каким-либо способом (например, путем подбора) найдено одно целочисленное решение: $x = \alpha$, $y = \beta$. Подставляя эти значения в уравнение, получаем тождество $a\alpha + b\beta = c$. Вычтем почленно это тождество из данного уравнения и преобразуем результат:

$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$, $ax = a\alpha - b(y - \beta)$, $x = \alpha - \frac{b(y - \beta)}{a}$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\frac{b(y - \beta)}{a}$ было целым числом (α — целое число), т. е. $y - \beta$ должно делиться на a. Обозначив целое частное от деления $y - \beta$ на a через t, $t \in \boldsymbol{Z}$, получим $y = \beta + at$ и далее $x = \alpha - bt$. Таким образом, все решения описываются формулами $x = \alpha - bt$, $y = \beta + at$, $t \in \boldsymbol{Z}$. Решения данной задачи запишем в виде $x = \alpha - 31t$, $y = \beta + 23t$, $t \in \boldsymbol{Z}$. Найдем какое-либо частное решение $(\alpha; \beta)$. Перепишем исходное уравнение в виде $23x = 1000 - 31y$ и разрешим его относительно x: $x = 43 - y + \frac{11 - 8y}{23}$. Из этой записи следует, что $\frac{11 - 8y}{23}$ должно быть целым числом, т. е. $\frac{11 - 8y}{23} = u$, $u \in \boldsymbol{Z}$, или $8y = 11 - 23u$. Найдем теперь y: $y = \frac{11 - 24u + u}{8} = 1 - 3u + \frac{u + 3}{8}$. Полагая $u = -3$, получаем частное решение $\beta = 1 - 3(-3) = 10$ и $\alpha = 43 - 10 - 3 = 30$. Таким образом, решение данного уравнения имеет вид $x = 30 - 31t$, $y = 10 + 23t$, $t \in \boldsymbol{Z}$. Решая систему неравенств $30 - 31t > 0$ и $10 + 23t > 0$ в целых числах, найдем $t = 0$, т. е. $x = 30$, $y = 10$.

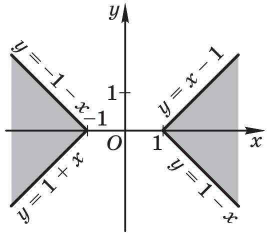
14. а).



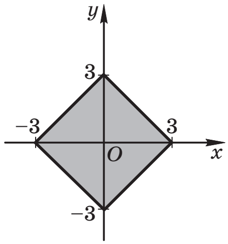
14. б).



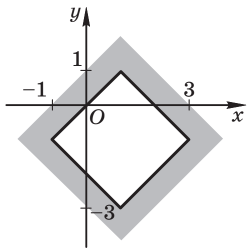
14. в).



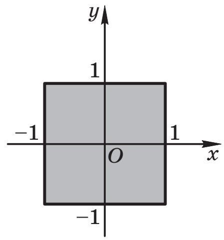
14. г).



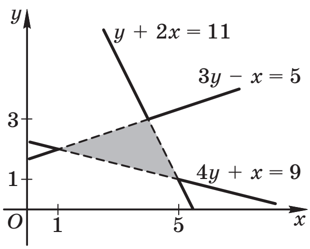
14. д).



14. е).



15. $\{(2;\ 2);\ (3;\ 2);\ (4;\ 2)\}$.



16. $\left(-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};\ -2\right)$. **17.** $\{(1;\ 2;\ 3)\}$. **18.** $\varnothing$. **19.** $\{(2;\ -3;\ 6)\}$.

20. $\{(-2t-2;\ 3t+1;\ 2t+3)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$. ● Положите $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}=t$.

21. а) 25. ▲ *I способ*. Умножим уравнения системы на α и β $(\alpha\beta \neq 0)$ и сложим их:

$$\left(\frac{2\alpha}{3}+\beta\right)x+\left(\frac{4\alpha}{5}+\beta\right)y+\left(\frac{5\alpha}{6}+\beta\right)z=61\alpha+79\beta.$$

Потребуем, чтобы одновременно выполнялись равенства $\frac{2\alpha}{3}+\beta=0,\ \frac{4\alpha}{5}+\beta=\frac{2}{5},\ \frac{5\alpha}{6}+\beta=\frac{1}{2}$; тогда $S=\frac{2y}{5}+\frac{z}{2}=61\alpha+79\beta$. Значения α и β найдем из системы уравнений

$$\frac{2\alpha}{3}+\beta=0,\ \frac{4\alpha}{5}+\beta=\frac{2}{5},\ \frac{5\alpha}{6}+\beta=\frac{1}{2}.$$

Эта система совместна и имеет решение $\alpha=3$, $\beta=-2$; тогда $S=61\cdot 3-79\cdot 2=25$.

II способ. Представим данную систему уравнений в виде

$$\frac{2x}{3}+\frac{4y}{5}=61-\frac{5z}{6},\ x+y=79-z$$

и решим ее относительно x, y, считая z известным. Умножив второе уравнение на $-\frac{2}{3}$ и сложив с первым уравнением, получаем

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)y=\left(61-\frac{79\cdot 2}{3}\right)-\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)z;$$

$$\frac{2}{15}y=\frac{25}{3}-\frac{z}{6};\ \frac{2}{5}y=25-\frac{z}{2}.$$

Теперь находим $S=\frac{2y}{5}+\frac{z}{2}=25-\frac{z}{2}+\frac{z}{2}=25$;

б) $\{(27;\ 10;\ 42)\}$. ▲ Так как по условию x, y, z — натуральные числа, то $x=3k$, $y=5l$ и $z=6m$, где $k\in \boldsymbol{N}$, $l\in \boldsymbol{N}$, $m\in \boldsymbol{N}$. Тогда систему можно представить в таком виде:

$$4l+5m=61-2k,\ 5l+6m=79-3k.$$

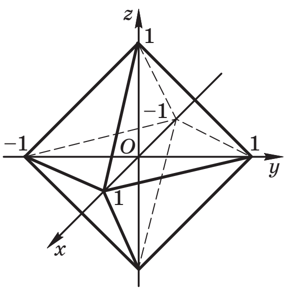


Рис. 11

Отсюда находим $l=29-3k$ и $m=$ $=2k-11$. Наибольшим значением $k\in \boldsymbol{N}$, удовлетворяющим системе неравенств

$$k>0,\ 29-3k>0,\ 2k-11>0,$$

является значение $k=9$. Далее находим решение системы: $x=3\cdot 9=27$, $y=$ $=(29-3\cdot 9)5=10$, $z=6\,(2\cdot 9-11)=42$.

22. $a<0$. ● Исключите из системы неравенств b и c. **23.** Правильный октаэдр (рис. 11).

§ 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

1. а) $\left\{\left(\frac{4}{9}; \frac{20}{9}\right); (2; 1);\right\}$ б) $\left\{(-1; 3); \left(\frac{71}{21}; -\frac{25}{7}\right)\right\}$; в) $\{(51; 24{,}5)\}$.

● Разложите левую часть первого уравнения системы на множители; г) $\{(-19{,}6;\ 5{,}2);\ (-14;\ 8)\}$. ● Представьте левую часть первого уравнения системы в виде $(x + 3y)^2 - 6(x + 3y) - 40$ и положите $x + 3y = t$.

2. а) $\{(2;\ 3);\ (3;\ 2)\}$. ▲ Используя обратную теорему Виета, получаем квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, корни которого $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$. Данная система обладает тем свойством, что если она имеет одно решение $(t_1;\ t_2)$, то упорядоченная пара чисел $(t_2;\ t_1)$ также является ее решением. Таким образом, множество решений исходной системы есть $\{(2; 3); (3; 2)\}$; б) $\{(4; -1); (1; -4)\}$. ● Положите $-y = z$; в) $\{(1;\ 3);\ (3;\ 1)\}$. ● Используйте тождество $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$; г) $\left\{\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)\right\}$. ● Положите $\frac{1}{x} = u$, $-\frac{1}{y} = v$; д) $\{(-1;\ 2);\ (2;\ -1)\}$. ▲ Используя тождество $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, найдем xy: $1^3 = 7 + 3xy \cdot 1 \Rightarrow xy = -2$. Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Решив теперь квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, найдем все решения исходной системы; е) $\{(1; 2); (2; 1)\}$. ● Для нахождения $xy = z$ используйте равенство $(x + y)^4 = x^4 + y^4 + 4(x + y)^2z - 2z^2$; ж) $\{(3;\ 2);\ (2;\ 3)\}$; з) $\{(-1;\ -4);\ 4;\ 1)\}$. **3.** а) $\{(-3;\ 4);\ (4\!:\ -3)\}$; б) $\{(5 + \sqrt{28};\ -5 + \sqrt{28});\ (5 - \sqrt{28};\ -5 - \sqrt{28});\ (5;\ 2)\ (-2;\ -5)\}$; в) $\{(0{,}6; 0{,}3); (0{,}4; 0{,}5)\}$; г) $\{(-1; 2); (-0{,}25; -0{,}25)\}$; д) $\left\{(2; 1); (1, 2); \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$. ● Положите $x + y = u$, $xy = v$, а затем $u + v = z$, $uv = t$. **4.** а) $\left\{\left(-\frac{25+5\sqrt{61}}{9}; \frac{5+\sqrt{61}}{9}\right);\right.$

$\left(\frac{5-\sqrt{61}-25}{9};\ \frac{5-\sqrt{61}}{9}\right);\ \left(-6;\ -\frac{4}{3}\right);\ \left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{3}\right)\Big\}$. ▲ Полагая $x = yt$, приведем первое уравнение системы к виду $y^2(2t^2 + t - 45) = 0$. Решив это уравнение, найдем $t_1 = \frac{9}{2}$ и $t_2 = -5$ ($y = 0$ не удовлетворяет системе). Таким образом, исходная система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} 2x + 9y^2 = 4, \\ x = \dfrac{9y}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x + 9y^2 = 4, \\ x = 5y, \end{cases}$$

решив которую получим ответ;

б) $\left\{(-1;\ 3);\ (1;\ -3);\ \left(\frac{16}{\sqrt{11}};\ \frac{1}{\sqrt{11}}\right);\ \left(-\frac{16}{\sqrt{11}};\ -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\right\}$. ● Умножьте первое уравнение системы на 3, а второе — на -16 и сложите их. Затем положите $x = yt$; в) $\{(1;\ 2);\ (-1;\ -2);\ (\sqrt{2};\ \sqrt{2});\ (-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})\}$;

г) $\left\{\left(\frac{2+\sqrt{19}}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}};\ -\frac{3}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}}\right);\ \left(\frac{\sqrt{19}-2}{\sqrt[3]{4\sqrt{19}-14}};\ \frac{3}{\sqrt[3]{4\sqrt{19}-14}}\right);\right.$ $\left.(2;\ -1)\right\}$.

5. а) $\{(2;\ 1)\}$. ▲ Умножив второе уравнение системы поочередно на 2 и -2 и сложив с первым, получаем систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 16x^2 + 8xy + y^2 - 72x - 18y + 81 = 0, \\ 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x + y)^2 - 18(4x + y) + 81 = 0, \\ (2x - 3y)^2 - 2(2x - 3y) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 9, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Решение последней системы находится просто (это линейная система): $\{(2;\ 1)\}$; б) $\left\{\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ \left(0;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ (1;\ 1);\ (-1;\ -1)\right\}$.

6. а) $\left\{\left(\frac{2}{7};\ -\frac{9}{7}\right);\ (1;\ 3)\right\}$. ● Перемножьте уравнения и положите

$x + y = t$; б) $\{(2;\ 6);\ (1;\ 3)\}$. **7.** а) $\left\{\left(2\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right);\ \left(-2\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)\right\}$;

б) $\left\{\left(\sqrt{6};\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right);\ \left(-\sqrt{6};\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$. **8.** $\left\{\left(3;\ \frac{7}{2}\right);\ \left(-3;\ -\frac{7}{2}\right)\right\}$. **9.** $\{(3;\ 1)\}$.

10. $a = -1$. Искомая точка $(0; -1)$. **11.** а) $\{(1; -5)\}$; б) $\{(1; -3)\}$; в) $\{(-3; 1)\}$ при $a \in \{-2\}$; $\varnothing$ при $a \notin \{-2\}$. **12.** а) $\left\{(2;\ 1;\ -1);\ \left(\frac{31}{15};\ \frac{17}{15};\ -\frac{2}{3}\right)\right\}$;

б) $\{(1; 2; 2); (2; 1; 1)\}$. **13.** $\left\{(3; -2; 1); (-2; 3; 1); \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ \frac{3-\sqrt{17}}{2};\ -1\right);\right.$

$\left.\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2};\ -1\right)\right\}$. **14.** $\{(3;\ 1;\ -2);\ (-5;\ -3;\ 0)\}$. ● Выразите из первого уравнения системы y через x и подставьте во второе уравнение системы. **15.** $\{(3;\ 5;\ -1);\ (-3;\ -5;\ 1\}$. **16.** $\left\{(2;\ -1;\ 3);\right.$

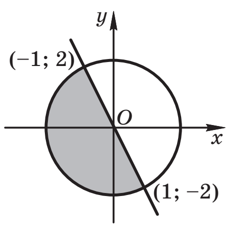
$\left.(-2;\ 1;\ -3);\ \left(-\frac{7}{\sqrt{13}};\ \frac{5}{\sqrt{13}};\ -\frac{11}{\sqrt{13}}\right);\ \left(\frac{7}{\sqrt{13}};\ -\frac{5}{\sqrt{13}};\ \frac{11}{\sqrt{13}}\right)\right\}$.

17. $\{(-4;\ -3;\ 1);\ (4;\ 3;\ -1)\}$. **18.** $\left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)\right\}$. ● Преобразуйте уравнения системы к виду

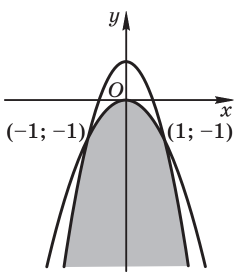
$$\frac{x+y}{xy} = 5 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\quad \frac{y+z}{yz} = 7 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z},\ \frac{x+z}{xz} = 6 = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}.$$

19. $\{(-1; 1; 0); (1; -1; 0)\}$. **20.** $\{(3; 3; 3)\}$. **21.** $\{(1; 5; 0); (1; -5; 0); (-1; 5; 0); (-1; -5; 0)\}$. ● Положите $y - z = t$.

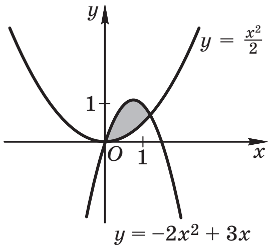
22. а).



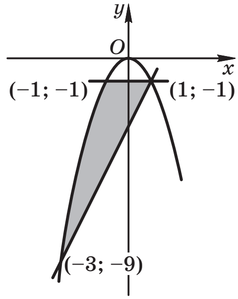
22. б).



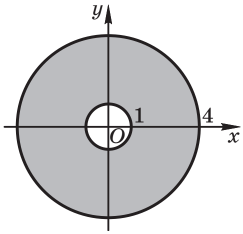
23. а).



23. б).



23. в).



§ 7. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. а) $\{a^2 - 1\}$ при $a \in [0; +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in [-\infty; 0)$; б) $\left\{\frac{a-3}{2}\right\}$ при $a \in [-3; +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in [-\infty; -3)$; в) $\{3\}$. ● Система

$$\begin{cases} 4 + 2x - x^2 = (x-2)^2, \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

равносильна данному уравнению. Решив эту систему, получите ответ. **2.** а) $\{-3\}$; б) $\{28\}$; в) $\{4\}$; г) $\left\{0; \frac{4}{3}\right\}$. **3.** а) $\{6\}$. ▲ Уравнение определено при $x \in [2; +\infty)$. Умножив обе его части на $\sqrt{x+10} - \sqrt{x-2} \neq 0$ (при указанных ограничениях), получим

$\sqrt{x+10} - \sqrt{x-2} = 2$, $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 2$, $x = 6$;

б) $\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2; \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\right\}$ при $a \in (0; 1]$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty; 0] \cup$

$\cup (1; +\infty)$; в) $(1; +\infty)$. **4.** $\{0; 3\}$. ● Положите $\sqrt{1+x} = t$, $\sqrt{4-x} = y$.
5. $\{1\}$.

6. а) $x \in [2; 5]$. ▲ Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} - 2| = 1.$$

При $1 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 2$ уравнение выполняется тождественно, а при $\sqrt{x-1} < 1$ и при $\sqrt{x-1} > 2$ решений нет; б) $x \in [10; +\infty)$; в) $x \in [1; 2]$. **7.** а) $\{5; -14\}$. ▲ Полагая $\sqrt[3]{13-x} = u$, $\sqrt[3]{22+x} = v$, получим

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^3+v^3=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=5, \\ uv=6 \end{cases} \Rightarrow u_1=2,\ v_1=3;\ u_2=3,\ v_2=2 \text{ и т. д.}$$

б) $\{3; -24; -88\}$. ▲ Полагая $\sqrt[3]{24+x} = u$, $\sqrt{12-x} = v$, имеем

$$\begin{cases} u+v=6, \\ u^3+v^3=36 \end{cases} \Rightarrow u^3 + u^2 - 12u = 0 \Rightarrow u_1 = 0,\ u_2 = 3,\ u_3 = -4$$

и т. д.

8. а) $\left\{\frac{1}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right)^2 + 3\right\}$ при $a \in [2; +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty; 2)$;

б) $\left\{5 \pm \frac{a\sqrt{8-a^2}}{2}\right\}$ при $a \in [2; 2\sqrt{2}]$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty; 2) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$.

▲ Пусть $\sqrt{7-x} = u$, $\sqrt{x-3} = v$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u+v=a, \\ 7-x+x-3=u^2+v^2=4; \\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0, \end{cases}$$

которую решаем подстановкой $u = a - v$ и получаем

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}, \\ v_1 = \dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = \dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}, \\ v_2 = \dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}. \end{cases}$$

Чтобы уравнение имело действительные корни, необходимо выполнение системы неравенств $8 - a^2 \geqslant 0$, $a - \sqrt{8 - a^2} \geqslant 0$, решением которой являются значения $a \in [2;\ 2\sqrt{2}\,]$. Теперь находим ответ: $x - a = v^2$, $x = 3 + v^2 = 5 \pm \dfrac{a\sqrt{8 - a^2}}{2}$;

в) $\left\{\dfrac{2a+1}{a-2}\right\}$ при $a \in \left[-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right] \cup (2;\ +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in \left(\dfrac{1}{3};\ 2\right]$.

г) $\{a + 1 + \sqrt{2a}\,,\ a + 1 - \sqrt{2a}\,\}$ при $a \in \left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]$, $\{a + 1 + \sqrt{2a}\,\}$ при $a \in \left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty;\ 0)$; д) $(-\infty;\ 0]$ при $a = 0$, $\left\{0;\ \dfrac{3a}{4}\right\}$ при $a \in (0;\ +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty;\ 0)$; е) $\{a^2 + a;\ a^2 - a + 1\}$ при $a \in [0;\ 1]$, $\{a^2 + a\}$ при $a \in (1;\ +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty;\ 0)$; ж) $\left\{\dfrac{a^2}{2a-1}\right\}$ при $a \in \left[0;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup [1;\ +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty;\ 0) \cup \left[\dfrac{1}{2};\ 1\right)$. **9.** $\{17 \pm \sqrt{257}\,;$ $17 \pm \sqrt{224}\,\}$. ● Полагая $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} = u$, $\sqrt[5]{(x-1)(x-31)} = v$, запишите систему уравнений

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^5 - v^5 = 31. \end{cases}$$

От второго уравнения системы с учетом первого уравнения перейдите к уравнению $(uv)^2 + uv - 6 = 0$ и т. д.

10. $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$. ● Освободитесь от иррациональности, разделив уравнение на x^4, и положите $x^2 - \dfrac{1}{4x^2} = y$. **11.** а) $\{-1\} \cup [2;\ +\infty)$; б) $(0{,}5;\ 2]$; в) $(1;\ 3]$; г) $[-2;\ +\infty)$ при $a \in [-2;\ +\infty)$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty;\ -2)$; д) $\left[-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{(1-a)^2}\right)\right)$ при $a \in (-\infty;\ 1)$; $\left[-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$ при $a \in [1;\ +\infty)$; е) $\left(\dfrac{3}{4};\ 2\right)$. **12.** а) $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\ 1\right]$; б) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$; в) $(3;\ 4{,}8]$; г) $[3;\ 12)$; д) $\left(-\dfrac{5}{8};\ \dfrac{12}{5}\right]$; е) $\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{6};\ +\infty\right)$.

13. а) $\left(\frac{8}{3};\ +\infty\right)$; б) $[-2;\ +\infty)$; в) $[-4;\ -2] \cup [1;\ 2]$; г) $[-2;\ 0]$; д) $\{-3\} \cup [-2;\ 1]$; е) $[-2;\ -1] \cup [7;\ +\infty)$. **14.** а) $[-5;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{29}}{2};\ 9\right)$; в) $[-6;\ 0) \cup (3;\ 4]$; г) $[-4;\ 0) \cup (4;\ 6]$.

15. а) $\left[\frac{3}{2};\ 2\right) \cup (2;\ 26)$; б) $(-2;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; в) $\left[-6;\ -\frac{4}{3}\right) \cup (2;\ 3]$.

16. а) $\left[-5;\ -\frac{9+\sqrt{61}}{8}\right)$; б) $\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$; в) $\left[-1;\ -\frac{3}{4}\right)$. ▲ Полагая $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = y$, приведем неравенство к виду $y^2 - 3y + 2 < 0$. Решив его, получим двойное неравенство $1 < y < 2$, или $1 < \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} < 2$, которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} > 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} < 2, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется при всех $x \geqslant -1$, что очевидно. Возведя в квадрат второе неравенство, получим равносильное неравенство $\sqrt{x^2+4x+3} < -x$, эквивалентное в свою очередь системе

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 4x + 3 < x^2, \\ x^2 + 4x + 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Учитывая еще неравенство $x \geqslant -1$, получаем ответ: $-1 \leqslant x < -\frac{3}{4}$.

г) $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{2}\right]$. ▲ Найдем область определения неравенства: $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{2}\right]$. Умножив числитель и знаменатель на $1 + \sqrt{1-4x^2}$ и сократив дробь на x, приходим к эквивалентному неравенству $\frac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}} < 3$. Очевидно, что это неравенство выполняется во всей области определения; д) $\left(1;\ \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{3};\ +\infty\right)$.

● Неравенство может выполняться лишь при некоторых $x > 1$. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получится при $x > 1$ равносильное неравенство. Его следует преобразовать к виду $\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + 1\right)^2 > \left(\frac{37}{12}\right)^2$.

17. а) $x \in (-\infty; -2] \cup (5; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; -3] \cup (6; +\infty)$.
18. а) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; б) $\frac{5}{2}x\sqrt{x}$; в) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$; г) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; д) $\frac{\sqrt{2}+1+2\sqrt{2x}}{2\sqrt{x}}$;

е) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; ж) $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. **19.** а) $x - 4y + 4 = 0$; б) $y + 1 = 0$; в) $y + x - 4 = 0$; г) $y - 3x + 3 = 0$. **20.** а) $\{4\}$; б) $\{1\}$; в) $\{3\}$; г) функция критических точек на имеет; д) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; е) функция критических точек не имеет. **21.** а) $(4; +\infty)$; б) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $(\sqrt{7}-2; +\infty)$; г) $(0; 9) \cup (9; +\infty)$; д) $(0; 9)$. **22.** а) $(-\infty; 2{,}5)$; б) $(1; 2)$; в) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; г) $(0; +\infty)$; д) $(0; 1)$.

23. ▲ Рассмотрим функцию $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$. Ее производная $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ на указанном интервале положительна, а $f(1) = 0$. Следовательно, $f(x) > 0$ на этом интервале, а $2\sqrt{x} > \frac{1}{x} - 3$.
Замечание. Доказательство можно провести проще, представив $f(x)$ в виде $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2(2\sqrt{x}+1)}{x}$.

24. а) $\max\limits_{[-6;8]} f(x) = f(0) = 10$, $\min\limits_{[-6;8]} f(x) = f(8) = 6$;

б) $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 8$, $\min\limits_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0$;

в) $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = \sqrt[3]{9}$, $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = f(2) = 0$.

25. $x = 1$ — точка минимума, точек максимума нет; $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = 4\sqrt{6}$, $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(1) = 0$.

26. а) $x \in \left[-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 7\right] \cup \{9\}$. ▲ Так как $(x + 3)(9 - x) \equiv$ $\equiv 27 + 6x - x^2$, то числители обеих дробей, входящих в исходное неравенство, одинаковы и имеют смысл при $(x + 3)(9 - x) \geqslant 0$, т. е. при $x \in [-3; 9]$.

Ясно, что при $x = -3$ или при $x = 9$ данное неравенство превращается в верное числовое неравенство $(0 \geqslant 0)$, т. е. значения $x = -3$ и $x = 9$ войдут в ответ.

При остальных x из области определения исходного неравенства имеем $\sqrt{(x+3)(9-x)} \equiv \sqrt{27+6x-x^2} > 0$. Значит, разделив неравенство на это положительное выражение, получаем равносильное неравенство

$$\frac{1}{3x-2} \geqslant \frac{1}{2x+5},$$

которое после очевидных преобразований примет вид

$$\frac{7-x}{6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)} \geqslant 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов (рис. 12), находим $x \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 7\right)$.

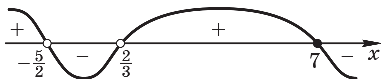


Рис. 12

Пересечение этого множества с интервалом $(-3; 9)$ (интервалом, на котором радикалы, входящие в данное неравенство, положительны) дает решения $x \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 7\right)$. Наконец, объединяя эти решения с найденными ранее решениями $x = -3$ и $x = 9$, получаем ответ.

б) $\left[-6; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; 3]$; в) $[-3; 2] \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right) \cup \{5\}$; г) $[-4; -3) \cup$ $\cup \left(\frac{5}{2}; 5\right]$.

27. а) $x \in (-\infty; 1] \cup \left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$. ▲ Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - \frac{5}{2} < 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - \frac{5}{2} \geqslant 0, \\ x^2 - 4x + 3 > \left(x - \frac{5}{2}\right)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

В результате последовательных преобразований имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x \geqslant 3, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant \frac{5}{2}, \\ x > \frac{13}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > \frac{13}{4}. \end{cases}$$

б) $(-\infty; 1] \cup \left(\frac{49}{24}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 3] \cup \left(\frac{33}{8}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; 2] \cup \left(\frac{25}{8}; +\infty\right)$.

28. а) $x \in (-\infty; -4] \cup [12; +\infty)$. ▲ Множество решений неравенства является объединением множеств решений двух систем

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + x - 12 \geqslant x^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 12 \geqslant 0. \end{cases}$$

Второе неравенство первой системы эквивалентно неравенству $x \geqslant 12$ и множеством решений этой системы является промежуток $[12; +\infty)$. Во второй системе решением квадратного неравенства $x^2 + x - 12 \geqslant 0$ является объединение двух промежутков: $(-\infty; -4]$ и $[3; +\infty)$. Поэтому множество решений второй системы представляет собой промежуток $(-\infty; -4]$. Объединив решения двух систем, получим ответ.

б) $(-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$; в) $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$; г) $(-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$.

§ 8. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1. а) $\{(16; 30)\}$. ● Положите $\frac{1}{\sqrt{x-7}} = u$, $\frac{1}{\sqrt{y+6}} = v$; б) $\{(41; 40)\}$.

2. а) $\left\{(c; c-1) \mid c \in \boldsymbol{R}\text{, кроме } c = \frac{1}{2}\right\}$; б) $\left\{\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}\right); (5; 4)\right\}$.

3. $\left\{\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{109}+9}{2}}; \sqrt{\frac{3\sqrt{109}-9}{2}}\right); (-5; -3)\right\}$. ● Преобразуйте первое уравнение системы к виду $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 12$ при $x - y > 0$ и $x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} = 12$ при $x - y < 0$.

4. $\{(0; a + \sqrt{a^2+3})\}$ при $a \in (-\infty; \sqrt{3})$, $\{(0; a + \sqrt{a^2+3})$; $(0; -a - \sqrt{a^2-3})$; $(0; \sqrt{a^2-3} - a)\}$ при $a \in [\sqrt{3}; +\infty)$. **5.** $\left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup$ $\cup [0; +\infty)$. **6.** $[2; 2\sqrt{2}]$.

7. Решение существует, если $b \geqslant a \geqslant 0$, при этом:

1) если $a > 0$, $b > 0$, то $x = \frac{ab}{a+b}$, $y = \frac{a+b}{4}$; 2) если $b > 0$, $a = 0$, то $x = 0$, $y = \frac{b}{4}$; 3) если $a = 0$, $b = 0$, то $x = 0$, $y = 0$. ▲ Из условия следует $y \geqslant 0$. Складывая и вычитая исходные уравнения, получаем

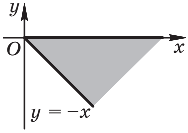
$$\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = 2\sqrt{y}, \quad \sqrt{b-x} - \sqrt{a-x} = 2\sqrt{y-x}. \qquad (1)$$

Так как $\sqrt{y-x} \geqslant 0$, то $\sqrt{b-x} \geqslant \sqrt{a-x}$, $b \geqslant a$. Складывая и вычитая уравнения, полученные в результате возведения уравнений (1) в квадрат, находим $y = \frac{a+b}{4}$, $x = \sqrt{a-x}\sqrt{b-x}$, или $x(a+b) = ab$. Отсюда следует, что $x \geqslant 0$. Учитывая, что $y \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $b \geqslant a$, заключаем, что решение существует только при $b \geqslant a \geqslant 0$.

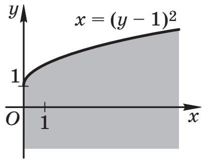
8. $x_{1,2} = 1$, $y_{1,2} = \pm 8$; $x_{3,4} = -1$, $y_{3,4} = \pm 8$. ● Разделите второе уравнение на первое. Тогда $\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 4$, $y = \pm 8x$ и т. д.

9. $x_1 = 1$, $y_1 = -8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 1$. **10.** $x_1 = \frac{128}{13}$, $y_1 = \frac{2}{13}$; $x_2 = \frac{2}{13}$, $y_2 = \frac{128}{13}$. **11.** $x = \frac{5}{2}$, $y = 6$. **12.** $x = \frac{5}{8}a^2$, $y = a^2\sqrt{\frac{3}{8}}$. **13.** $x_{1,2} = \pm 16$; $y_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm 1$; $y_{3,4} = \pm 16$. **14.** $x = -1$, $y = -4$. **15.** а) $\frac{7}{4} \leqslant x < 4$; б) $\{1\}$.

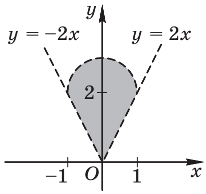
16.



17.



18.



Глава II

Показательные и логарифмические функции. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств

§ 1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. Числа, указанные в пп. б); в); д), больше 1. **2.** Числа, указанные в пп. а) и б), меньше 1. **3.** а) $y > x$; б) $y > x$; в) $x > y$; г) $x > y$. **4.** $2^{300} < 3^{200}$. ▲ Имеем $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$, $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$; следовательно, $9^{100} > 8^{100}$. **5.** а) 9; б) $\ln 3$; в) $\ln |a|$; г) $4 \log_a |b|$; д) 3. **6.** а) 2; б) 1; в) 2; г) 0. ▲ Имеем $a^{\sqrt{\log_a b}} = (a^{\log_a b})^{1/\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$, а отсюда следует, что $b^{\sqrt{\log_b a}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$. **7.** а) $3\,(1 - c - d)$; б) $\dfrac{5-d}{2(c-2d+cd+1)}$; в) $5c - 6d - 4$. ▲ Представим десятичную дробь 0,175 в виде обыкновенной: $0{,}175 = \dfrac{175}{1000} = \dfrac{7}{40} = \dfrac{7}{2^2 \cdot 10}$. Таким образом, $\lg 0{,}175 = \lg 7 - 2\lg 2 - 1$ и задача сводится к нахождению $\lg 2$ и $\lg 7$. Имеем

$$\lg 196 = \lg 2^2 \cdot 7^2 = 2\lg 2 + 2\lg 7 = c, \tag{1}$$

$$\lg 56 = \lg 2^3 \cdot 7 = 3\lg 2 + \lg 7 = d. \tag{2}$$

Решив систему уравнений (1) и (2) относительно $\lg 2$ и $\lg 7$, получим $\lg 2 = \dfrac{2d-c}{4}$, $\lg 7 = \dfrac{3c-2d}{4}$; поэтому

$$\lg (0{,}175)^4 = 4\,(\lg 7 - 2\lg 2 - 1) = 5c - 6d - 4.$$

8. ▲ Имеем $\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$ и $\log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} =$

$= \frac{1 + 3\log_2 3}{3 + \log_2 3}$, откуда, полагая $\log_2 3 = x$, получим

$$ab + 5(a - b) = \frac{1 + 2x}{2 + x} \cdot \frac{1 + 3x}{3 + x} + 5\left(\frac{1 + 2x}{2x} - \frac{1 + 3x}{3 + x}\right) =$$

$$= \frac{6x^2 + 5x + 1 + 5(-x^2 + 1)}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{x^2 + 5x + 6}{(x + 2)(x + 3)} = 1.$$

9. 3. ▲ Полагая $\log_2 12 = a$ и учитывая, что $\frac{1}{\log_{96} 2} =$ $= \log_2 2^3 \cdot 12 = a + 3$, $\log_2 24 = 1 + a$, $\log_2 196 = a + 4$ и $\frac{1}{\log_{12} 2} = a$, для данного выражения получим $(a + 1)(a + 3) - a(a + 4) = 3$.

10. ▲ Очевидно, что $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. Используя свойства логарифмической функции, имеем (при $n > 1$)

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1}$$

или

$$\log_n (n + 1) - \log_n n > \log_{n+1} (n + 2) - \log_{n+1} (n + 1),$$

а отсюда сразу получаем, что $\log_n (n + 1) > \log_{n+1} (n + 2)$, поскольку $\log_n n = \log_{n+1} (n + 1) = 1$.

11. ▲ Так как $27 > 25$, то $\log_8 27 > \log_9 25$. Но $\log_8 27 =$ $= \log_{2^3} 3^3 = \log_{2^3} 3^2 = \log_4 9$; следовательно, $\log_4 9 > \log_9 25$.

12. а) $\{5 + \log_3 7\}$; б) $\left\{\frac{8}{7}\right\}$; в) $\{0\}$; г) $\left\{2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}\right\}$; д) $\{10\}$; е) $\{1\}$; ж) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. 13. а) $\{5\}$; б) $\{0\}$; в) $\left\{\log_{4,5} \frac{9}{\sqrt{8}}\right\}$; г) $\{-0{,}2; 3\}$; д) $\{3\}$; е) $\{10\}$.

14. а) $\{-1; 1\}$. ▲ Полагая $2^{x^2+2} = t$, приведем исходное уравнение к виду $t^2 - 9t + 8 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получаем $t_1 = 1$, $t_2 = 8$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $2^{x^2+2} = t_1 = 1$ и $2^{x^2+2} = t_2 = 8$.

Первое из этих уравнений не имеет решений ($x^2 + 2 \neq 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$), второе показательное уравнение $2^{x^2+2} = 2^3$ сводится к квадратному уравнению $x^2 + 2 = 3$, решениями которого являются $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$; б) $\{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$. ● Положите $3^{x^2-1} = t$; в) $\{20\}$; г) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. ● Положите $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$. **15.** а) $\{\log_{\frac{3}{2}} 2; 2\log_{\frac{3}{2}} 2\}$.

● Разделите уравнение на 4^x и положите $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$; б) $\{1 - \sqrt{3}; 0; 2; 1 + \sqrt{3}\}$. ● Разделите уравнение на 9^{2x-x^2+1} и положите $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2+1} = t$; в) $\{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$; г) $\left\{\log_{\sqrt{5\sqrt{2}-7}} 6; 0\right\}$.

16. а) $\{-2; 3\}$. ▲ Положим $3^{x^2} = u$, $3^{x+6} = v$. Тогда исходное уравнение примет вид $u^2 - 2uv + v^2 = 0$, или $(u - v)^2 = 0$; отсюда следует, что $3^{x^2} = 3^{x+6}$. Решив показательное уравнение, получим ответ;

б) $\{2; 4\}$. ▲ Полагая $2^{\sqrt{2x+1}} = y$, $2^x = z$, получаем $\frac{x^2y}{2} + z = 2y + \frac{x^2z}{4}$ или $\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)(2y - z) = 0$. Отсюда имеем: $\frac{x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ (посторонний корень), $x_2 = 2$ или $2^{\sqrt{2x+1}+1} = 2^x$, $\sqrt{2x+1} = x - 1 \Rightarrow x_3 = 0$ (посторонний корень), $x_3 = 4$.

17. а) $\{11\}$. ▲ Преобразуем левую часть уравнения:

$$4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 4^{\log_4 3(x-3)}\ (2^{\log_2 5})^2 =$$
$$= 5^2\ (4^{\log_4(x-3)})^{1/3} = 25(x-3)^{1/3}.$$

Теперь имеем: $25(x - 3)^{1/3} = 50$, $x - 3 = 2^3$, $x = 11$; б) $\{4\}$.

18. $\{-3; -1\}$. **19.** а) $\{27\}$;

б) $\{-1\}$. ▲ Преобразуем уравнение к виду

$$\log_2 (3 - x)(1 - x) = \log_2 2^3, \tag{1}$$

или после преобразований $x^2 - 4x - 5 = 0$. Последнее уравнение имеет корни $x = -1$ и $x = 5$. Так как уравнение (1) неравносильно исходному, то необходимо осуществить проверку полученных корней. Проверка показывает, что корень $x = 5$ квадратного уравнения исходному уравнению не удовлетворяет; в) $\{4\}$; г) $\{8\}$; д) $\{2\}$; е) $\{3\}$; ж) $\{3;\ 3 + \sqrt{2}\}$. ● Учтите, что $\log_3 (x - 4)^2 = 2 \log_3 |x - 4|$. **20.** а) $\{-11; -6 - \sqrt{7}; -6 + \sqrt{7}; -1\}$; б) $\{3\}$; в) $\{-17\}$; г) $\{1\}$; д) $\{2\}$; е) $\{\sqrt{2};\ \sqrt{6}\}$. ● Воспользуйтесь тождеством $\lg^2 a = \lg^2 \frac{1}{a}$. **21.** а) $\left\{-2^{\frac{1}{\log_a 4a^4}};\ 2^{\frac{1}{\log_a 4a^4}}\right\}$ при $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup (1; +\infty)$, $\varnothing$ при остальных $a \in \boldsymbol{R}$.

▲ Область определения: $x \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Имеем

$$2 \log_2 x^2 + \frac{\log_2 x^2}{\log_2 a} = 1 \Rightarrow \log_2 x^2 = \frac{\log_2 a}{\log_2 2a^2} \ \left(a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \left(2^{\log_2 a}\right)^{\frac{1}{\log_2 2a^2}} = a^{\frac{1}{\log_2 2a^2}} \Rightarrow x = \pm a^{\frac{1}{\log_2 4a^4}}.$$

б) $\left\{\frac{3a+3}{7-a}\right\}$ при $a \in (3; 7)$, $\varnothing$ при $a \notin (3; 7)$; в) $\left\{\frac{2a-1}{6}\right\}$ при $a \in (-\infty; -12) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, $\varnothing$ при $a \in \left[-12; \frac{1}{2}\right]$.

▲ Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6x^2 + 25x = 2ax + 8a - 4, \\ 6x^2 + 25x > 0. \end{cases}$$

Решив уравнение этой системы, находим $x_1 = -4$ (посторонний корень, так как не выполняется неравенство системы), $x_2 = \frac{2a-1}{6}$. Решив далее неравенство $6\left(\frac{2a-1}{6}\right)^2 + 25\left(\frac{2a-1}{6}\right) > 0$, находим допустимые значения параметра.

22. а) $\{1; 60\}$. ▲ При $x = 1$ обе части уравнения обращаются в нуль; следовательно, $x = 1$ — корень уравнения. Теперь будем искать корни уравнения, предполагая, что $x \neq 1$ (только при $x = 1$ обе части уравнения обращаются в нуль). Для этого умножим уравнение на $\frac{1}{\log_3 x\ \log_4 x\ \log_5 x}$:

$$1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} = \log_x 3 + \log_x 4 + \log_x 5.$$

Решив теперь уравнение $\log_x 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1$, найдем другой корень $x = 60$; б) $\left\{1;\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x \cdot \log_3 x - 3\log_3 x = 0 \qquad (1)$$

и убедитесь, что $x = 1$ — корень этого уравнения; далее преобразуйте уравнение (1) к виду $\log_x 3 - 6\log_x 2 - 2 = 0$ и найдите другие корни. **23.** а) $\left\{\frac{1}{10};\ \sqrt{10}\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{2};\ 4\right\}$; в) $\{3;\ 3^9\}$; г) $\left\{\frac{1}{625};\ 5\right\}$.

24. а) $\{\sqrt[5]{5};\ 5\}$. ● Положите $\log_x \sqrt{5} = t$; б) $\{10\}$; в) $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. ● Положите $\log_{3x+7}(2x+3) = t$; г) $\left\{0;\ \frac{7}{4};\ \frac{3+\sqrt{24}}{2}\right\}$. ● Положите $\lg(4 - x) = u$, $\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = v$ и разложите на множители многочлен $u^2 + uv - 2v^2$. **25.** а) $\{2\}$. ● Воспользуйтесь тем, что $\log_x 27 \cdot \log_9 x = \frac{\log_x 27}{\log_x 9} = \log_9 27 = \frac{3}{2}$; б) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ 8\right\}$. ● Положите $\log_2 x = t$;

в) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1;\ 4\right\}$. ▲ Используя формулу $\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N}$, преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 \frac{x}{2}} - 14\,\frac{\log_2 x^3}{\log_2 16x} + 40\,\frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4x} =$$

$$= \frac{2\log_2 x}{\log_2 x - 1} - \frac{42\log_2 x}{\log_2 x + 4} + \frac{20\log_2 x}{\log_2 x + 2}.$$

Полагая теперь $\log_2 x = t$, придем к уравнению $t(2t^2 - 3t - 2) = 0$, корни которого $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_3 = 2$. Решив далее уравнения $\log_2 x = t_n$ $(n = 1, 2, 3)$ и проверив эти корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение, получим ответ;

г) $\left\{\frac{1}{8};\, 1;\, 4\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{9};\, 1;\, 3\right\}$; е) $\{5\}$. **26.** а) $\{a-1;\, a+1\}$ при $a \in (1;\, \sqrt{2}\,) \cup$ $\cup\, (\sqrt{2}\,;\, 2) \cup (2;\, +\infty)$, $\{3\}$ при $a = 2$; б) $\{a^2\}$ при $a \in \left(0;\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\, 1\right) \cup (1;\, +\infty)$. **27.** а) $\{25\}$. ● Положите $3 + \log_{0,2} x = t$; б) $\left\{\frac{1}{9}\right\}$; в) $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}$. ● Положите $\log_x(x^2+1) = t$; г) $\{2\}$. ● Положите $\sqrt{\log_2 x} = t$. **28.** а) $\{3\}$; б) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; в) $\{3;\, 10\}$. **29.** а) $\{2;\, 4)$; б) $\left\{\log_2 \frac{3}{5};\, \log_2 \frac{2}{5}\right\}$. **30.** а) $\{2\}$; б) $\{2\}$; в) $\{0\}$; г) $\{-1;\, 2\}$; д) $\{2\}$; е) $\{-\log_2 3\}$. **31.** а) $\left\{-\frac{9}{10};\, 99\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{10^5};\, 10^3\right\}$; в) $\{1000\}$; г) $\{0\}$.

32. $\left\{\frac{1}{10};\, 2;\, 1000\right\}$. **33.** $\{0{,}2;\, 6\}$. **34.** $\{2\}$. ● Положите $2^{\log_{x^2}(3x-2)} = u$, $3^{\log_{x^2}(3x-2)} = v$ и решите уравнение $3u^2 - 5uv + 2v^2 = 0$ относительно u (или v). **35.** $\left[\frac{1}{5};\, +\infty\right)$.

36. $\left\{\frac{1}{16}\right\} \cup [4;\, +\infty)$. ▲ Положим $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y$; тогда от исходного уравнения перейдем к уравнению

$$\log_2 \sqrt{y+6} = \log_2 \sqrt{2}\,|y|, \text{ или } 2y^2 - y - 6 = 0,$$

корни которого $y_1 = 2$ и $y_2 = -\frac{3}{2}$. С учетом этого имеем:

1) $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = |\sqrt{x} - 2| \Rightarrow x \geqslant 4$;

2) $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$.

Объединяя полученные решения, найдем ответ.

37. а) $\{2\}$. ▲ Подбором устанавливаем, что $x = 2$ — корень уравнения. Докажем, что других корней исходное уравнение не имеет. Преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$ и предположим, что существует его решение $x < 2$. Рассмотрим две показательные функции: $y_1 = \left(\frac{5}{13}\right)^x$ и $y_2 = \left(\frac{12}{13}\right)^x$, которые являются убывающими, поэтому для значений $x < 2$ имеем $\left(\frac{5}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{12}{13}\right)^2$. Складывая эти неравенства, получаем $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 =1$, что означает отсутствие корней у данного уравнения, меньших 2. Аналогично можно доказать, что уравнение не имеет корней, бо́льших 2; б) $\{3\}$; в) $\{0\}$. ● Для доказательства единственности решения исследуйте функции $y = 2^x$ и $y = 1 - x$ на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; г) $\{3\}$. **38.** 15 при $a \in \{3\}$. **39.** а) $\left\{\left(2; \frac{3}{2}\right)\right\}$; б) $\{(|a|^{66/5}; a^{72/5})\}$ при $a \neq 0$, $|a| \neq 1$; в) $\left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$. **40.** а) $\left\{\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$; б) $\{8; 1\}$. **41.** а) $\left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$. ● Прологарифмируйте второе уравнение системы по основанию 2; б) $\{(\sqrt[4]{3}; -1); (\sqrt[4]{3}; 1)$. **42.** а) $\{(18; 2); (2; 18)\}$; б) $\{(20; 5)\}$; в) $\{(3; 6); (6; 3)\}$; г) $\left\{\left(4; -\frac{1}{2}\right)\right\}$. ● Положите $\log_2 x = u$, $4^{-y} = v$. **43.** а) $\{(0{,}1; 2); (100; -1)\}$. ● Прологарифмируйте второе уравнение системы по основанию 10; б) $\{(2; 10); (10; 2)\}$; в) $\left\{\left(2; \frac{1}{6}\right)\right\}$; г) $\left\{\left(\frac{9a}{2}; \frac{a}{2}\right); \left(\frac{a}{2}; \frac{9a}{2}\right)\right\}$ при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **44.** а) $\{(2; 4); (4; 2)\}$. ● Положите в первом уравнении системы $\log_x y = z$; б) $\{(a^2; a); (a; a^2)\}$ при $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$, $\{((a+1)^2; -(a+1)); (-(a+1); (a+1)^2)\}$ при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$, $\varnothing$ при $a \in \{-2; 1\} \cup [-1; 0]$. **45.** а) $\{(3; 9); (9; 3)\}$; б) $\{(3; 2)\}$. **46.** а) $\{(-2; -2); (2; 2)\}$; б) $\{(12; 4)\}$. **47.** $\left\{\left(5; \frac{1}{2}\right)\right\}$. **48.** $\left\{\left(64; \frac{1}{4}\right)\right\}$. **49.** $\{(-2; 4)\}$.

● При решении системы учтите, что $y \in N$.

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

1. а) $[-1;\ 1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};\ 3]$. ▲ Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2x-2>0, \\ x^2-2x-2\leqslant 1. \end{cases}$$

Решением первого неравенства являются все x такие, что $x\in[-\infty;\ 1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};\ +\infty)$, второго — такие, что $x\in[-1;\ 3]$. Пересечением этих множеств решений являются значения $x\in[-1;\ 1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};\ 3]$; б) $(2;\ 9)$; в) $[-4;\ -3)\cup(0;\ 1]$; г) $[4;\ 6)$.

2. а) $(-\infty;\ -2)\cup\left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$; б) $\left[-2;\ -\frac{2}{3}\right)$; в) $[0;\ 2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2};\ 6]$; г) $\left(\frac{3}{4};\ \frac{4}{3}\right)$. **3.** а) $(-\infty;\ -2{,}5)\cup(0;\ +\infty)$; б) $(-1-\sqrt{2};\ -2)\cup(0;\ \sqrt{2}-1)$; в) $(-\infty;\ 2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2};\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -2)\cup\left(\frac{15}{8};\ +\infty\right)$; д) $[-7;\ -\sqrt{35})\cup[5;\ \sqrt{35})$. **4.** а) $(2;\ 7)$. ▲ Так как основанием логарифмов левой и правой частей неравенства служит одно и то же число, большее единицы, то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ x+3>2x-4, \end{cases}$$

решив которую получим ответ; б) $(-\sqrt{5};\ -2)\cup(1;\ \sqrt{5})$. ● Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+x-2>0, \\ x^2+x-2<x+3; \end{cases}$$

в) $(-1;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$; г) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. ● Преобразуйте левую часть неравенства к виду $\log_2(x+1)^{-1}$; д) $(-1;\ 1+2\sqrt{2})$. **5.** а) $(2;\ 7)\cup(22;\ 27)$. ▲ Исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 27-x>0, \\ \lg(x-2)(27-x)<2, \end{cases}$$

равносильной в свою очередь системе

$$\begin{cases} 2 < x < 27, \\ 0 < (x-2)(27-x) < 100, \end{cases}$$

решив которую получим ответ; б) $(2; 4)$; в) $\left(1; \frac{11}{10}\right)$; г) $[-1; 4)$.

6. а) $(-4; -1-\sqrt{3}\,] \cup (0; \sqrt{3}-1]$; б) $(3; 5]$; в) $(2; 5)$; г) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. **7.** а) $(\log_2 5; +\infty)$; б) $(-1; 7)$; в) $(1-\sqrt{5}; -1) \cup (3; 1+\sqrt{5})$; г) $(-\infty; 0)$; $\cup\ (3; +\infty)$; д) $(2; +\infty)$; е) $(-\infty; -8) \cup (4; +\infty)$; ж) $[0; +\infty)$ при $a \in (-\infty; 0)$, $((a \log_3 2)^2; +\infty)$ при $a \in (0; +\infty)$. **8.** а) $(0; 10^{-4}] \cup [10; +\infty)$. ▲ Полагая $\lg x = t$, получаем неравенство $t^2 + 3t - 4 \geqslant 0$, равносильное совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} t \leqslant -4, \\ t \geqslant 1 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \lg x \leqslant -4, \\ \lg x \geqslant 1, \end{array}\right.$$

решив которую получим ответ; б) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$. ● Положите $\log_2 x = t$; в) $(0; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$; г) $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}\right) \cup (8; 16)$. ● Положите $\log_2^2 x = t$; д) $\left(0; \frac{1}{\sqrt{27}}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \sqrt{243}\right] \cup [27; +\infty)$. ● Положите $2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 7 = t$; е) $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$; ж) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (32; +\infty]$. **9.** а) $\left[\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. ● Положите $2^{2x+1} = t > 0$; б) $(-1; +\infty]$. ● Положите $10^x = t > 0$; в) $\left(\log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$; г) $(-\infty; 1 - \log_3 \sqrt[3]{5}\,]$. ● Положите $3^{2-3x} = t > 0$; д) $(-\infty; 0) \cup (\log_2 3; +\infty)$; е) $(0{,}01; +\infty)$. ● Положите $3^{\lg x + 2} = t > 0$; ж) $(-\infty; -1) \cup (-0{,}1; 0)$. ● Положите $2^{\lg(-x)} = t > 0$. **10.** а) $(\log_2(5+\sqrt{33}) - 1; +\infty)$; б) $(-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$; в) $(\log_5(\sqrt{2}+1); \log_5 3)$. ● Положите $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) = t$; г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **11.** а) $[2; +\infty)$;

б) $\left[\frac{28}{3};\ +\infty\right)$; в) $\left[\log_3 \frac{83}{19};\ +\infty\right)$. **12.** а) $(-3;\ -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6};\ 3)$;

б) $\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$. **13.** а) $[-3;\ 1)$; б) $\left(-4;\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$. **14.** а) $(0;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$;

б) $(1000;\ +\infty)$; в) $\left(0;\ \frac{1}{4}\right] \cup [4;\ +\infty)$. **15.** а) $\left(\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2};\ +\infty\right)$ при

$a \in (1;\ +\infty)$; $\left(1;\ \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right)$ при $a \in (0;\ 1)$. ▲ Необходимо рассмотреть случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$. Если $a > 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 1, \\ x(x-1) > a^2. \end{cases}$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - x - a^2$ являются $x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$ и $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$, поэтому решениями второго неравенства системы служат $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$. Но $x_1 < 0$, значит, решением системы являются все x из промежутка $(x_2;\ +\infty)$ ($x_2 > 1$ при $a > 1$).

Аналогично рассматривается случай, когда $0 < a < 1$. Имеем систему

$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - a^2 < 0. \end{cases}$$

Решениями второго неравенства системы являются все x такие, что $x \in (x_1;\ x_2)$. С учетом первого неравенства системы получаем $x \in (1;\ x_2)$; б) $(0;\ a^5) \cup (a^3;\ a^2) \cup \left(\frac{1}{a};\ +\infty\right)$; в) $\left(\frac{1}{a};\ a^4\right)$ при $a \in (1;\ +\infty)$, $\left(a^4;\ \frac{1}{a}\right)$ при $a \in (0;\ 1)$; г) $[\log_a (4 + \sqrt{16+a^2});\ 3\log_a 2)$ при $a \in (0;\ 1)$, $[\log_a (4 + \sqrt{16+a^2});\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$. **16.** а) $(3;\ 4) \cup (5;\ +\infty)$. ▲ Исходное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x - 3 > 1, \\ 0 < x - 1 < (x-3)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x - 3 < 1, \\ x - 1 > (x-3)^2 > 0. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $x \in (5; +\infty)$, вторая — $x \in (3; 4)$; объединяя эти решения, получаем ответ; б) $(1; 2)$. **17.** а) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup$ $\cup (1; 2) \cup (3; 6)$; б) $(-3; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; 3)$; в) $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{23}{22}\right)$; г) $\left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [-1; 3]$; д) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)$. **18.** а) $(-3; -1)$; б) $\left(0; \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right) \cup$ $(1; +\infty)$. **19.** а) $\left[-1; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup \left(2; \frac{7}{2}\right)$; б) $(3; 5 - \sqrt{3}) \cup (7; +\infty)$. **20.** $(1; 2)$; б) $(0; 3) \cup (4; 6) \cup (6; 12) \cup (14; +\infty)$. **21.** а) $(0; 4)$; б) $[2; 4)$; в) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$; г) $(1; 2)$. **22.** а) $(0; 2)$. ● Приведите неравенство к виду $(2^x - 1)(25 - 5^x) > 0$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right) \cup (3; +\infty)$. ● Приведите неравенство к виду $\frac{(\log_3 x - 1)(2\log_5 x + 1)}{\log_3 x} > 0$; в) $(-1; +\infty)$ **23.** $\{8\}$. ● Докажите, что $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right) < 0$. **24.** $\{4\}$. **25.** $\left(0; \frac{1}{a^4}\right)$ при $a \in$ $\in (1; +\infty)$, $(0; a^8)$ при $a \in (0; 1)$.

§ 3. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЯМИ

1. Функции а), б), д), — четные; в), г), е), ж), — нечетные. **2.** $3^x = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$. ▲ Пусть $f_1(x) = f_1(-x)$ и $f_2(x) = -f_2(-x)$. Тогда

$$3^x = f_1(x) + f_2(x), \tag{1}$$

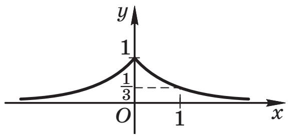
а

$$3^{-x} = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x). \tag{2}$$

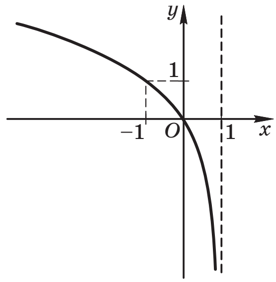
Решив систему уравнений (1) и (2) относительно $f_1(x)$ и $f_2(x)$, получим $f_1 = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$, $f_2 = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$.

3. $T = 2\pi$; нет. **4.** $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

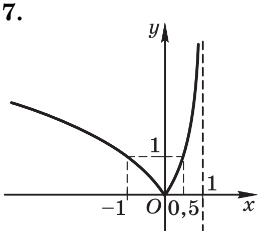
5.



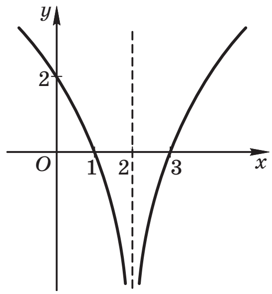
6.



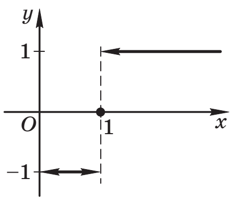
7.



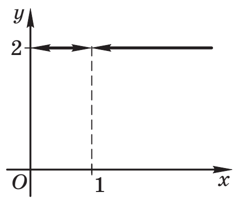
8.



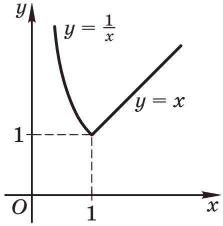
9.



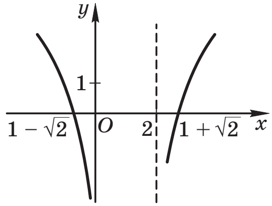
10.



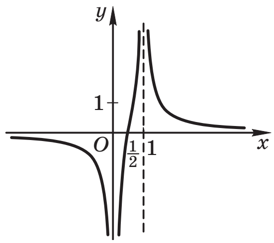
11.



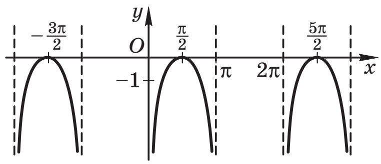
12.



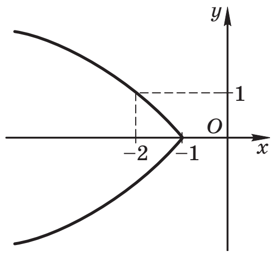
13.



14.



15.



16. а) $3^x \ln 3$; б) $10^x \ln 10$; в) $\frac{1}{2^x} \ln \frac{1}{2}$; г) $e^x - e^{-x}$; д) $2e^x + e^{-x}$; е) $3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$. **17.** $10^x (1 + x \ln 10)$; б) $e^x (1 + x)$; в) $e^{-x} (1 - x)$; г) $\sqrt{2^x} \ln \sqrt{2}$; д) $e^{x^3 - 5x^2} (3x^2 - 10x)$; е) $\frac{xe^x}{1 + x^2}$. **18.** а) $\frac{1}{x \ln 3}$; б) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right)$; в) $\frac{1}{2x \ln 5}$; г) $\frac{5}{x \ln 7}$; д) $1 + \frac{1}{x}$; е) $\ln x + 1$.

19. а) $\frac{2 \ln x}{x}$; б) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; в) $-\frac{2}{x(1 + \ln x)^2}$; г) $\frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2}$.

20. а) $32 \ln 2$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 1,2; г) 3. **21.** а) $y = x + 1$; б) $y = x - 1$.

22. а) $\{0\}$; б) $\{-1;\ 3\}$; в) $\{-2;\ -1\}$; г) $\left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}$; д) $\{-\ln a\}$ при $a \in (0; +\infty)$; при $a \in (-\infty; 0]$ функция критических точек не имеет. ▲ Дифференцируя и приравнивая производную нулю, получаем уравнение

$$e^{-2x} - (a - 3)e^{-x} - 3a = 0,$$

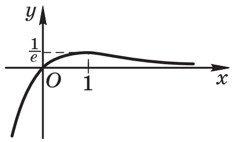
откуда $e^{-x} = -3$ и $e^{-x} = a$. Первое уравнение не имеет действительных корней, второе имеет решение $x = -\ln a$, если $a > 0$. При $a \leqslant 0$ второе уравнение также не имеет действительных корней; е) $\{\log_{0,2}(-a)\}$ при $a \in (-\infty; 0)$; при $a \in [0; +\infty)$ функция критических точек не имеет; ж) $\{0; \ln 2\}$. **23.** а) $\{2\}$; б) $\{e^3\}$; в) $\{-4; 1\}$. **24.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ и $(2; +\infty)$. **25.** $\left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{3e}}; 2\right)$ и $\left(4; 3 + \sqrt{1 + \frac{1}{3e}}\right)$. **26.** а) Возрастает на $(-\infty; 0)$; убывает на $(0; +\infty)$; б) возрастает на $(e; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$ и $(1; e)$; в) возрастает на $\left(\log_2 \frac{3}{2};\right.$ $\left.+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; \log_2 \frac{3}{2}\right)$. **27.** а) $x = 1$ — точка, максимума; $x = e$ — точка минимума; б) функция точек экстремума не имеет. **28.** $\left\{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right\}$. ▲ Так как $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ и $f'(1) = f'(2) = 0$, то имеем систему

$$\begin{cases} a + 2b = -1, \\ \frac{a}{2} + 4b = -1. \end{cases}$$

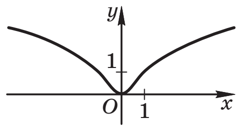
Решив эту систему, находим $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{6}$. Таким образом, $f'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1$, и проверкой убеждаемся, что в точках $x = 1$ и $x = 2$ производная меняет знак.

29. а) $\max\limits_{[-4;4]} y = y(-4) = 7e^4$, $\min\limits_{[-4;4]} y = y(-2) = -3e^2$; б) $\max\limits_{[-1;2]} y = y(2) = \frac{17}{4 \ln 2}$, $\min\limits_{[-1;2]} y = y(0) = \frac{2}{\ln 2}$; в) $\max\limits_{[-1;1]} y = y(1) = 24$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(0) = 0$; г) $\max\limits_{[0,5;4]} y = y(4) = 21 + 3 \ln 2$, $\min\limits_{[0,5;4]} y = y(1) = 0$. **30.** 0. **31.** а) $(3,5; +\infty)$; б) $(-\ln 2; \ln 2)$. **32.** а) ▲ Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x - 1$. Имеем $f'(x) = e^x - 1 > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $f(0) = 0$, следовательно, для всех x из указанного промежутка $f(x) > 0$; б) ● Исследуйте знак производной функции $f(x) = x - \ln(1 + x)$ на заданном промежутке.

33.



34.



35. а) $\{-1;\ 1\}$. ▲ Записав исходное показательное уравнение в виде

$$(5^x)^2 - \frac{29}{10} \cdot 5^x \cdot 2^x + (2^x)^2 = 0,$$

после деления обеих его частей на $(2^x)^2 > 0$ имеем

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x\right]^2 - \frac{29}{10}\left(\frac{5}{2}\right)^x + 1 = 0.$$

Далее, полагая $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0$, сведем его к квадратному уравнению $t^2 - \frac{29}{10}t + 1 = 0$, откуда получаем

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{5}, \\ t = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1}, \\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

б) $\{-1;\ 0)$; в) $\{1;\ 2\}$; г) $\{-2;\ -1\}$.

36. а) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$. ▲ Так как в области определения этого уравнения (т. е. при $x > 0$) имеем $x^{\log_5 4} = (2^{\log_2 x})^{\log_5 4} = 2^{\frac{\log_5 x}{\log_5 2} 2\log_5 2} = (2^{\log_5 x})^2$, то после замены $t = 2^{\log_5 x} > 0$ исходное уравнение сводится к квадратному уравнению $2t^2 + 5t - 3 = 0$, решая которое, последовательно получаем

$$\left[\begin{array}{l} t = -3, \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{\log_5 x} = 2^{-1} \Leftrightarrow \log_5 x = -1 \Leftrightarrow x = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

б) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; в) $\left\{\frac{1}{49}\right\}$; г) $\left\{\frac{10}{9}\right\}$.

37. а) $\{1\}$. ▲ Учитывая, что $3^{x-\log_3 2} = \dfrac{3^x}{3^{\log_3 2}} = \dfrac{3^x}{2}$, а $6^{2-x} =$ $= \dfrac{6^2}{6^x} = \dfrac{36}{6^x}$, перепишем исходное уравнение в виде

$$2^x \cdot \frac{3^x}{2} - \frac{36}{6^x} + 3 = 0.$$

После умножения на $2 \cdot 6^x$ и замены $t = 6^x > 0$ получим квадратное уравнение $t^2 + 6t - 72 = 0$, откуда следует, что

$$\left[\begin{array}{l} t = -12, \\ t = 6 \end{array}\right. \Rightarrow t = 6 \Leftrightarrow 6^x = 6^1 \Leftrightarrow x = 1.$$

б) $\{-1\}$; в) $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; г) $\{-3;\ 1\}$.

38. а) $\{2\}$. ▲ Записав исходное уравнение в виде

$$2\sqrt{\frac{2^x - 3}{2^x}} + 1 = \sqrt{\frac{2^x}{2^x - 3}},$$

после замены $t = \sqrt{\dfrac{2^x}{2^x - 3}} > 0$ (в области определения) получаем $\dfrac{2}{t} + 1 = t$ или $t^2 - t - 2 = 0$. Отбрасывая отрицательный корень $(t = -1)$, имеем $t = 2$, т. е.

$$\sqrt{\frac{2^x}{2^x - 3}} = 2,\ \frac{2^x}{2^x - 3} = 4,\ 2^x = 4 \cdot 2^x - 12,\ 3 \cdot 2^x = 12,\ 2^x = 4,\ x = 2.$$

б) $\{-1\}$; в) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; г) $\{-2\}$.

39. а) $\left\{\dfrac{47}{16};\ \dfrac{49}{16};\ 1{,}5\right\}$. ▲ Здесь область определения есть $x \neq 3$. Используя свойства логарифма, получим

$$9\log_8^2 (x-3)^4 = 9(\log_{2^3} (x-3)^4)^2 = 9\left(\frac{4}{3}\log_2 |x-3|\right)^2 =$$

$$= 16\log_2^2 |x-3|;\ \log_4 (x-3)^2 = \log_2 |x-3|.$$

После сокращения на 16 запишем уравнение в виде

$$\log_2^2 |x-3| + 3\log_2 |x-3| - 4 = 0.$$

Введя новую переменную $t = \log_2 |x - 3|$, перейдем к квадратному уравнению

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -4, \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$$

1) $\log_2 |x-3| = -4 \Leftrightarrow |x-3| = \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow x - 3 = \pm\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{47}{16}, \\ x = \dfrac{49}{16}. \end{array}\right.$

2) $\log_2 |x-3| = 1 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5. \end{array}\right.$

б) $\left\{-5\dfrac{1}{3};\ -4\dfrac{2}{3};\ -32;\ 22\right\}$; в) $\left\{7\dfrac{1}{8};\ 6\dfrac{7}{8};\ 11;\ 3\right\}$; г) $\left\{-1\dfrac{1}{5};\ -\dfrac{4}{5};\ -26;\ 24\right\}$.

40. а) $[\log_3 2; 1]$. ▲ Положим $y = 3^x$, тогда неравенство примет вид $y^2 + 6 \leqslant 5y$, или $y^2 - 5y + 6 \leqslant 0$. Решив это неравенство, находим $2 \leqslant y \leqslant 3$ или $2 \leqslant 3^x \leqslant 3$, откуда следует, что $\log_3 2 \leqslant x \leqslant 1$.

б) $(-\infty; 1] \cup [\log_4 5; +\infty)$; в) $[0; 1]$; г) $(-\infty\ ; 1] \cup [\log_5 7; +\infty)$.

41. а) $(1; 7) \cup (7; +\infty)$. ▲ В области определения данного неравенства ($0 < x \neq 1$) имеем

$$-\log_x \frac{1}{7} = -\frac{\log_7 \frac{1}{7}}{\log_7 x} = \frac{1}{\log_7 x}.$$

Полагая $\log_7 x = t$, перейдем от исходного логарифмического неравенства к алгебраическому неравенству $t + \dfrac{1}{t} > 2$, решая которое, получим

$$\frac{t^2+1}{t} > \frac{2t}{t};\ \frac{(t+1)^2}{t} > 0;\ 0 < t \neq 1.$$

Возвращаясь к переменной x, имеем

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < 1, \\ t > 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_7 1 < \log_7 x < \log_7 7, \\ \log_7 x > \log_7 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 7, \\ x > 7. \end{array}\right.$$

Все найденные значения x принадлежат области определения исходного неравенства.

б) $(1; 3] \cup [81; +\infty)$; в)$(1; 2) \cup (4; +\infty)$; г) $(1; 8] \cup [16; +\infty)$.

42. а) $\left(0;\ \frac{1}{2}\right] \cup [\sqrt[3]{2};\ +\infty)$. ▲ Областью определения этого неравенства является множество $x > 0$. Логарифмируя обе части данного неравенства по основанию $\sqrt[3]{2}$, получим равносильное неравенство

$$(2 + \log_{\sqrt[3]{2}} x) \log_{\sqrt[3]{2}} x \geqslant 3.$$

Полагая $t = \log_{\sqrt[3]{2}} x$, приходим к квадратному неравенству $t^2 + 2t - 3 \geqslant 0$, решениями которого являются все $t \in (-\infty;\ 3] \cup$ $\cup\ [1;\ +\infty)$. Возвращаясь к исходной переменной x, получаем ответ.

б) $\left[\frac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ \sqrt[3]{9}\,]$; в) $\left(0;\ \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$; г) $\left(0;\ \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{1}{3};\ 1\right) \cup$ $\cup\ (1;\ +\infty)$.

43. а) $\left(-\frac{5}{4};\ -1\right) \cup \left(-1;\ \frac{1}{2}\right) \cup [1;\ +\infty)$. ▲ Из определения логарифма следует, что областью определения данного неравенства является интервал $\left(-\frac{5}{4};\ +\infty\right)$ за исключением точки $x = -1$. Разложив квадратный трехчлен на множители и приведя логарифм к основанию 10, получим равносильное исходному неравенство

$$\frac{(2x-1)(x-1)\ \lg(2x+3)}{\lg(4x+5)} \geqslant 0.$$

При переходе x через 1 или $\frac{1}{2}$ меняет знак только один из множителей дроби, записанной в левой части этого неравенства, а при переходе через -1 меняют знак сразу оба логарифма. Поэтому левая часть неотрицательна на интервалах $\left(-\frac{5}{4};\ -1\right)$, $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$ и на полуинтервале $[1;\ +\infty)$.

б) $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right) \cup \left(1;\ \frac{6}{5}\right]$; в) $\left[-\frac{4}{3};\ -1\right) \cup \left(-1;\ \frac{3}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

44. а) $(-\infty;\ 1) \cup \{10\}$. ▲ Поскольку $x^2 - 11x + 10 = (x-1)(x-10)$, неравенство примет вид

$$\frac{(\lg x - 1)(x-1)(x-10)}{(2^x - 2)^2} \leqslant 0.$$

Применяя метод интервалов (рис. 13), получаем ответ.

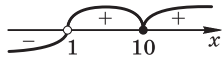


Рис. 13

б) $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; в) $\{\log_3 2\} \cup [3; +\infty)$; г) $[\log_7 5; 1) \cup (1; 9)$.

45. а) $(-\infty; 1-\sqrt{3}] \cup (1; 1+\sqrt{3}]$ ▲ Найдем область определения неравенства:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} > 0, \\ 1-\dfrac{x}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} > 0, \\ \dfrac{4-x}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 1, \end{array}\right. \\ x < 4, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 4)$.

Преобразуя исходное неравенство в полученной области определения, последовательно имеем

$$\log_2\left(1-\frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{4}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{x-1}{x} - \log_2\frac{4-x}{4} \leqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{4(x-1)}{x(4-x)} \leqslant \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{x(4-x)} \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{x(4-x)} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-2}{x(x-4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{[x-(1-\sqrt{3})][x-(1+\sqrt{3})]}{x(x-4)} \geqslant 0.$$

К последнему неравенству применяем метод интервалов (рис. 14), а затем, учитывая область определения, получаем ответ.

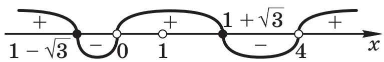


Рис. 14

б) $(-\infty; -3-\sqrt{7}) \cup (2; +\infty)$; в) $[-4; -2) \cup (1; 2]$; г) $\left[\frac{3}{8}; \frac{1}{2}\right] \cup$
$\cup (1; 3)$.

46. а) $\left(-\frac{7}{2}; -3\right) \cup (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$. ▲ Используя определение и свойства логарифмов, в результате последовательных преобразований получим

$$\log_{2x+7}(x^2+4x+4) < 2\log_{x^2}|x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x+7}(x^2+4x+4) < \log_{x^2}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 \neq 1, \\ \log_{2x+7}(x^2+4x+4) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 \neq 1, \\ 0 < 2x+7 < 1, \\ x^2+4x+4 > 2x+7, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 \neq 1, \\ 2x+7 > 1, \\ 0 < x^2+4x+4 < 2x+7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{7}{2} < x < -3; \\ -3 < x < -2, \\ -2 < x < -1, \\ -1 < x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

б) $\left(2; \frac{5}{2}\right) \cup (3; 4) \cup (5; 6) \cup (6; 7) \cup (7; 8)$; в) $(4; 5) \cup (5; 6) \cup (6; 7) \cup (7; 8)$; г) $\left(3; \frac{7}{2}\right) \cup (4; 5) \cup (6; 7) \cup (7; 8) \cup (8; 9)$.

47. а) $(0; 10^{-3}) \cup (1; 100)$; б) $(0; \log_2 3)$. **48.** $(3; 9)$, $(9; 3)$. **49.** $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$, $f_{\text{наиб}} = f(1) = 24$.

Глава III

Тригонометрия

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

2. а) $\sqrt{2-a^2}$; б) $1-\frac{(a^2-1)^2}{2}$. ● Воспользуйтесь тем, что $\sin^4\alpha+$ $+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{(a^2-1)^2}{2}$.

3. а) p^2-2; б) p^3-3p. **4.** а) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; б) $\frac{\sqrt{3(1-b)^2}-b}{2}$. ▲ Полагая $40°+\alpha=\beta$, получаем $\cos(70°+\alpha)=\cos(30°+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-$ $-\frac{1}{2}\sin\beta$. Так как $0°<\alpha<45°$, то $\cos\beta>0$ и поэтому $\cos\beta=$ $=\sqrt{1-b^2}$. Окончательно имеем $\cos(30°+\beta)=\frac{\sqrt{3(1-b^2)}}{2}-\frac{b}{2}$; в) $\frac{1073}{1105}$. ● Воспользуйтесь тем, что

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

г) $-\frac{117}{125}$; $\frac{44}{125}$; $-\frac{117}{44}$. ● Воспользуйтесь тем, что $\sin 3\alpha=$ $=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha=3\cos^3\alpha-$ $-3\sin^2\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=$ $=\frac{3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$. **5.** ● Используйте равенство $\alpha+\beta=\pi-\gamma$. **9.** а) $\operatorname{tg}2\alpha$; б) $-\operatorname{tg}\alpha$; в) $\operatorname{tg}2\alpha$; г) $\operatorname{cosec}\alpha$; д) $-\frac{1}{2}$.

▲ Имеем $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\Big(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+$

$$+\cos\frac{6\pi}{7}\Big)=\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$=-\frac{1}{2}$; е) 1. ● Приведите выражение к виду $\dfrac{\sin\frac{13\pi}{14}-\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)}{2\sin\frac{\pi}{14}}$.

11. а) ▲ Имеем

$$16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ =$$

$$=16\cos 80^\circ \cos 60^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ =$$

$$=8\cos 80^\circ \cos 60^\circ \cos 40^\circ\,\frac{2\cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=4\cos 80^\circ \cos 60^\circ\,\frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=2\cos 60^\circ\,\frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-160^\circ)}{\sin 20^\circ}=1;$$

б) ● Используйте формулы $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$; в) ● Воспользуйтесь тем, что $1\pm\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

12. $\frac{1}{3}$. ▲ Имеем $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=1{,}4$; отсюда получаем $2{,}4\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+0{,}4=0$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Последнее значение $\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\right)$ не удовлетворяет условию $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{8}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}\right)$. **13.** π. ▲ Из условия следует, что $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$, $0<\frac{\beta+\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}<1$ (α, β, γ —

положительные острые углы), поэтому можно провести следующие преобразования:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\frac{1}{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\text{, т. е.}$$

$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=0$, откуда следует, что

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=0,$$

а это возможно лишь при $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\Big($из условия видно, что $0<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}<\frac{3\pi}{4}$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Big)$.

14. а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. ▲ $\cos 292°30' = \sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$;

б) 4. ▲ $\operatorname{cosec} 10° - \sqrt{3}\sec 10° = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10°\cos 10°} =$
$= \frac{4\sin(30°-10°)}{\sin 20°} = 4$; в) $\sqrt{3}$. ▲ $\frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°} =$
$= \frac{\cos 40° - 2\sin 30°\sin 10°}{\sin 20°} = \frac{\sin 50° - \sin 10°}{\sin 20°} = \frac{2\cos 30°\sin 20°}{\sin 20°} = \sqrt{3}$;

г) 4. ▲ $-2\sqrt{2}\,(2\sin 35°\sin 10° - \sin 5° - 2\cos 5°\cos 40°) =$
$= -2\sqrt{2}\,(\cos 25° - \sin 5° - \cos 35° - 2\cos 45°) = -2\sqrt{2}\,(2\sin 30°\sin 5° -$
$- \sin 5° - \sqrt{2}) = 4$; д) $\frac{3}{4}$. ▲ $\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 73°\cos 47° =$
$= \frac{1}{2}(1 + \cos 146° + 1 + (\cos 94° + \cos 26°) + \cos 120°) = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2} +$
$+ 2\cos 60°\cos 34° - \cos(180° - 146°)\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$;

е) $-\frac{1}{2}$. ▲ $(\sin 6° - \sin 66°) + (\sin 78° - \sin 42°) = 2\cos 60°\sin 18° -$
$- 2\sin 30°\cos 36° = \sin 18° - \sin 54° = \frac{-2\cos 36°\sin 18°}{\cos 18°}\cos 18° =$

$= -\frac{2\cos 36^\circ \sin 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = -\frac{\sin 72^\circ}{2\cos 18^\circ} = -\frac{1}{2}$. **15.** а) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) 1; в) 0. ● Учтите, что $\operatorname{tg}^2 20^\circ = \frac{1-\cos 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}$; г) $\frac{1}{5}$. ▲ $(\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ - 1) + 1 = 1 + \frac{\cos 108^\circ \cos 36^\circ}{\sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ} = 1 - (\operatorname{ctg} 36^\circ \operatorname{ctg} 72^\circ)^2 \frac{1}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ} = 1 - \operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ \frac{2 \cdot 2\sin 36^\circ}{\sin 144^\circ} = 1 - 4\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ$. Имеем равенство $\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ = 1 - 4\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ$ или $5\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ = 1$, откуда получаем ответ. д) $-\frac{1}{16}$; е) $\frac{1}{8}$. **16.** а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\frac{1}{2}$. ● Умножьте и разделите данное выражение на $2\cos 18^\circ$ и преобразуйте числитель; е) 1. **20.** а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$; б) $y = 4 - x^2$; в) $y - x = 1$; г) $x^2 + y^2 = 2$.

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. а) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right]$;

б) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$;

в) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right] \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \{2\pi n\}$;

г) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left[-\pi + 2\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right] \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi n\right] \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$;

д) $D(y) = \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left[\pi n; \pi n; + \frac{\pi}{2}\right)$.

2. а) $E(y) = [-3; 3]$; б) $[\cos 2; 1]$; в) $(\cos 1; 1]$; г) $[-16; 10]$; д) $[0; 2]$.

3. а) $\max\limits_{x \in \boldsymbol{R}} y = \sqrt{a^2+b^2} + c$; $\min\limits_{x \in \boldsymbol{R}} y = c - \sqrt{a^2+b^2}$. ▲ Заданную функцию преобразуем так: $c + a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) + c = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) + c$. Очевидно, что функция y принимает наименьшее значение, если $\sin(\varphi + x) = -1$, и наибольшее, если $\sin(x+\varphi) = 1$; б) $\max\limits_{x \in \boldsymbol{R}} y = 11$,

$\min\limits_{x \in \boldsymbol{R}} y = 1$. ● $y = 5(1 + \cos 2x) - 3 \sin 2x + (1 - \cos 2x) = 4 \cos 2x - 3 \sin 2x + 6$. **4.** $[2\sqrt{2}\,; +\infty)$. **5.** $\min\limits_{x \in \boldsymbol{R}} y = 1$. ● Приведите функцию к виду $y = (\sin 3x + \sin 2x)^2 + 1$. **6.** ● Докажите сначала, что произведение четной и нечетной функций ($\sin x \cos 2x$) — функция нечетная, и затем — что сумма трех нечетных функций есть функция нечетная. **7.** ● Докажите сначала, что произведение двух нечетных функций $\left(\sin^3 \frac{x}{2} \sin x\right)$ — функция четная; далее докажите, что сумма трех четных функций есть функция четная. **8.** а) $\frac{2\pi}{3}$. ▲ Пусть число $T \neq 0$ — период данной функции. Тогда $\sin 3x = \sin 3(x + T)$, или $2 \cos\left(3x + \frac{3T}{2}\right) \sin \frac{3T}{2} = 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Очевидно, что это возможно лишь если $\sin \frac{3T}{2} = 0$, т. е. $\frac{3T}{2} = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Поскольку требуется найти наименьшее положительное число T, такое число найдем из уравнения $\frac{3T}{2} = \pi$ $(n = 1)$; б) 2π. ● Представьте функцию в виде $y = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 5x}{\cos 2x}$; в) 4π; г) π. ● Воспользуйтесь равенством $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$; д) 2π; е) π; ж) 70π.

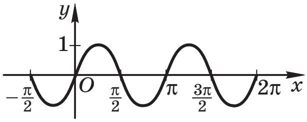
9. ● Рассмотрите: 1) сектор OAB круга радиуса R с углом x при вершине (его площадь равна $\frac{1}{2}R^2x$); 2) треугольник OAB (его площадь равна $\frac{1}{2} R^2 \sin x$); 3) треугольник OBC, описанный около сектора (его площадь равна $\frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$), и сравните площади указанных фигур.

10. ▲ Считая $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разделим на $\sin x > 0$ все части неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Получим неравенство $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, которое в силу того, что все его части положительны, равносильно неравенству $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Все функции, входящие в последнее неравенство, четные, поэтому оно справедливо как при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, так и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, т. е. при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

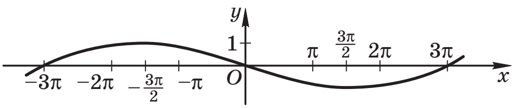
11. а) $\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$; б) $\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

● Умножьте и разделите данные выражения на $2\sin\dfrac{x}{2}$ и преобразуйте выражения, входящие в числители обеих дробей.

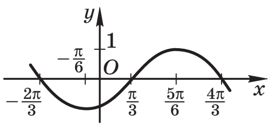
12. а).



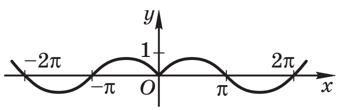
12. б).



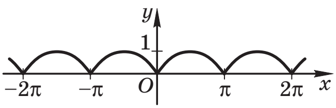
12. в).



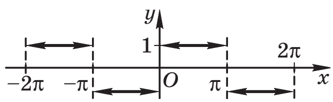
12. г).



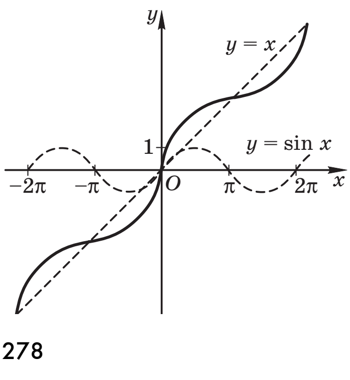
12. д).



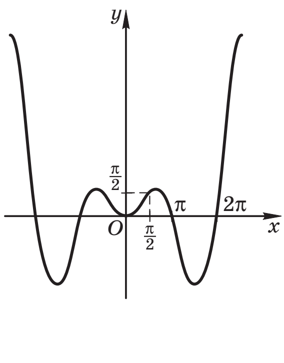
12. е).



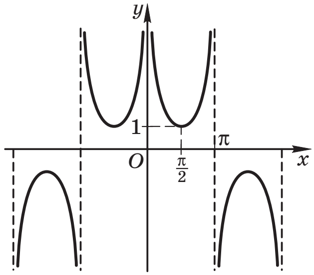
13. а).



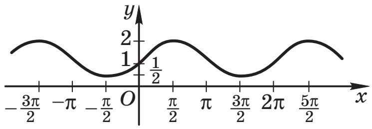
13. б).



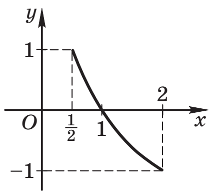
13. в).



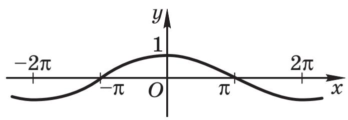
13. г).



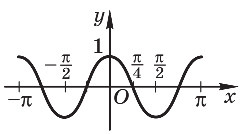
13. д).



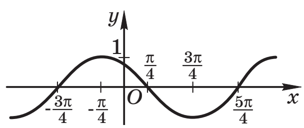
14. а).



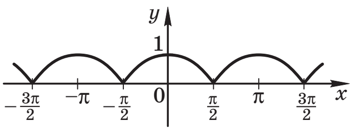
14. б).



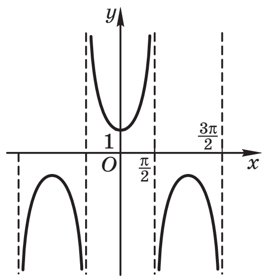
14. в).



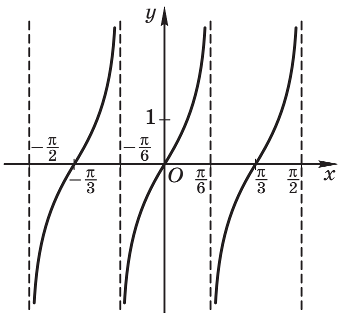
14. г).



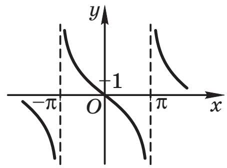
14. д).



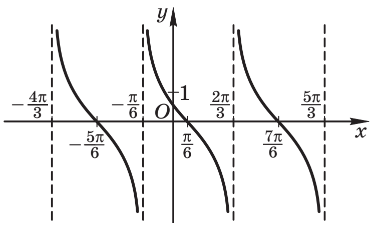
15. а).



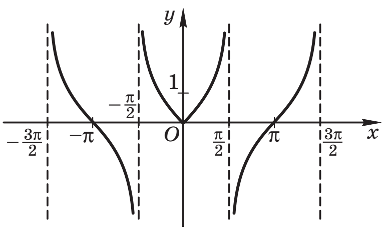
15. б).



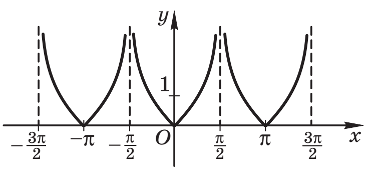
15. в).



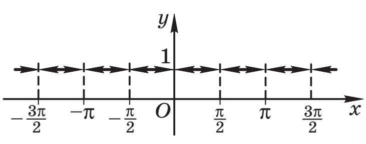
15. г).



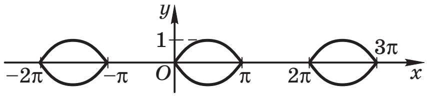
15. д).



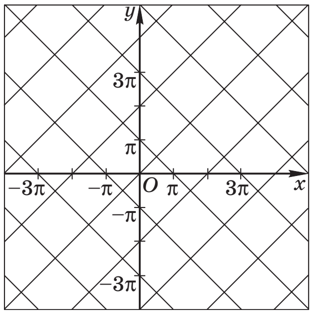
15. е).



16. а).



16. б).



17. а) $\cos x + \sin x$; б) $-\dfrac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$; в) $\sin 2x$; г) $-\sin 2x$; д) $\mathrm{tg}^2\, x\,(\mathrm{tg}^2\, x + 1)$; е) $\mathrm{ctg}^3\, x\,(\mathrm{ctg}^2\, x + 1)$; **18.** а) $3\cos 3x$; б) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$; в) $2\sin(4x - 2)$; г) $[-3\cos^2(x^2 + x)\sin(x^2 + x)](2x + 1)$; д) $\dfrac{1}{1+\cos x}$. **19.** а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) -2; в) 3. **20.** а) $y - 2 = 0$; б) $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4} - x$; в) $y - 1 = 4\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ **21.** $\max\limits_{x \in \boldsymbol{R}} y = 21$; $\min\limits_{x \in \boldsymbol{R}} y = -19$. **22.** $\dfrac{3}{4}$. ▲ Так как $f'(x) = 0$ при любых $x \in \boldsymbol{R}$, то $f(x) = \mathrm{const}$, и значение постоянной можно найти, подставив любое значение x, например $x = 0$.

§ 3. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Из определения обратных тригонометрических функций следует:

$$\sin(\arcsin x) = x,\ \cos(\arccos x) = x,$$
$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x,\ \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x.$$

Так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, то $\sin(\arccos x) \geqslant 0$, поэтому если $\alpha = \arccos x$, то в формуле $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ перед корнем нужно взять знак «+». Следовательно,

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Далее, так как $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то $\sin(\operatorname{arcctg} x) > 0$, поэтому в формуле $\sin\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ нужно отбросить знак «−». Таким образом,

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Далее,

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ и т. д.}$$

2. а) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. ▲ $\sin\left(2\arcsin\dfrac{1}{3}\right) = 2\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right) = 2\cdot\dfrac{1}{3}\sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; б) $\dfrac{7}{9}$; в) $\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$; г) $\dfrac{3}{5}$. ▲ $\sin(2\operatorname{arctg} 3) = 2\sin(\operatorname{arctg} 3)\cos(\operatorname{arctg} 3) = 2\cdot\dfrac{3}{\sqrt{1+9}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{3}{5}$; д) $-\dfrac{3}{4}$.

3. а) $\dfrac{23}{27}$. ▲ $\sin\left(3\arcsin\dfrac{1}{3}\right) = 3\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right) - 4\sin^3\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right) = 3\cdot\dfrac{1}{3} - 4\cdot\dfrac{1}{3^3} = \dfrac{23}{27}$; б) $-\dfrac{11}{16}$. **4.** а) $\sqrt{\dfrac{10-\sqrt{10}}{20}}$. ▲ $\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 3\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\operatorname{arctg} 3)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{10-\sqrt{10}}{20}}$; б) $\sqrt{\dfrac{26+\sqrt{26}}{52}}$; в) $\dfrac{2}{3}$.

5. а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

6. а) ▲ Пусть $\arcsin x = \arccos y$, тогда $\cos(\arccos y) = \cos(\arcsin x)$, $y = \sqrt{1-x^2}$, следовательно, $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ и т. д.

7. а) $\arccos\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$, $\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}$; б) $\arcsin\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$, $\operatorname{arcctg}\dfrac{12}{5}$; в) $\arcsin\dfrac{5}{13}$, $\arccos\dfrac{12}{13}$, $\operatorname{arcctg}\dfrac{12}{5}$; г) $\arcsin\dfrac{4}{5}$, $\arccos\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

8. а) ▲ Положим $\arcsin(-x) = \alpha$; тогда $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; $-x = \sin\alpha$; $x = -\sin\alpha$ и в силу нечетности синуса $x = \sin(-\alpha)$. Далее, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то из последнего уравнения следует, что $-\alpha$ является главным значением $\arcsin x$, т. е. $-\alpha = \arcsin x$. Отсюда $\alpha = \arcsin(-x) = -\arcsin x$;

в) ▲ Положим $\arccos(-x) = \alpha$; тогда $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $-x = \cos\alpha$. Отсюда $x = -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$, при этом $0 \leqslant \pi - \alpha \leqslant \pi$, т. е. $\pi - \alpha$ является главным значением $\arccos x$. Поэтому из уравнения $x = \cos(\pi - \alpha)$ следует $\pi - \alpha = \arccos x$, или $\alpha = \pi - \arccos x$.

9. а) $\pi - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\pi - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$; $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, или $\pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right)$; $-\arccos\frac{24}{25}$; $-\operatorname{arcctg}\frac{24}{7}$; в) $\pi - \arcsin\frac{24}{25}$, $\arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$, $\pi - \operatorname{arctg}\frac{24}{7}$.

10. а) ▲ Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}$, откуда $0 \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi$, т. е. сумма $\arcsin x + \arcsin y$ находится в пределах главных значений арккосинуса. Поэтому можно написать уравнение

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos z.$$

Отсюда

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \cos(\arccos z);$$

$$z = \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} - xy$$

и т. д.

11. а) $\arccos\left(-\frac{16}{65}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{19}{9}\right)$; г) $-\arcsin\frac{3}{5}$; д) $-\arcsin\frac{36}{325}$; е) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{21}$; ж) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{21}$.

12. а) ▲ Положим $\arcsin x + \arccos x = \alpha$. Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Учитывая, что

$$\sin\alpha = \sin(\arcsin x + \arccos x) = x \cdot x + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2} = 1,$$

приходим к выводу, что $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

б) ▲ Положим $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \beta$. Так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Учитывая, что $\sin \beta = \sin (\operatorname{arctg} x + {}$ $+ \operatorname{arcctg} x) = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 1$, заключаем, что $\beta = \frac{\pi}{2}$.

13. а) 1; б) 1. **14.** $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = \frac{7\pi^3}{8}$; $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^3}{32}$.

15. а) ▲ Из определения главных значений арксинуса следует, что $\arcsin (\sin \alpha) = \alpha$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Пусть $2\pi n - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant$ $\leqslant 2\pi n + \frac{\pi}{2}$; тогда $\arcsin (\sin x) = \arcsin (\sin (x - 2\pi n)) = x - 2\pi n$, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2\pi n \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Пусть $2\pi n + \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$; тогда

$$\arcsin (\sin x) = \arcsin (\sin (\pi - x)), \arcsin (\sin (\pi - x + 2\pi n)) =$$
$$= \pi - x + 2\pi n, \text{ так как } -\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x + 2\pi n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

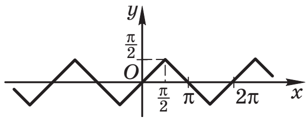
16. а) $-\frac{3\pi}{7}$; б) $\frac{11\pi}{18}$. ▲ Из определения главных значений арккосинуса следует, что $\arccos (\cos x) = x$, если $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Чтобы применить эту формулу, заменим $\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$ с помощью формул приведения на косинус угла, заключенного между 0 и π:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{11\pi}{18}.$$

Получаем $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{11\pi}{18}\right) = \frac{11\pi}{18}$; в) $-\frac{\pi}{5}$.

17. а) $\pi - 3$; $3 - \pi$; 3; $\frac{\pi}{2} - 3$; $3 - \frac{\pi}{2}$; б) $\pi - 4$; $2\pi - 4$; $4 - \pi$; $4 - \pi$; $4 - \frac{3\pi}{2}$; $4 - \frac{\pi}{2}$; в) $3\pi - 10$; $4\pi - 10$; $10 - 3\pi$; $10 - 3\pi$; $10 - \frac{7\pi}{2}$; $10 - \frac{5\pi}{2}$. **18.** $\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{29}}{3}$, $\operatorname{ctg}\sqrt{2n \pm \frac{1}{3}}$ ($n = 1, 2, 3, 4$). **19.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) π; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

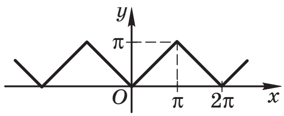
20. а).



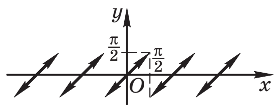
● При построении графика учтите, что $\arcsin(\sin x) = x$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Для остальных значений x постройте график, пользуясь тем, что из периодичности функции $\sin x$ следует периодичность функции $\arcsin(\sin x)$ с периодом 2π.

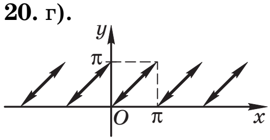
20. б).



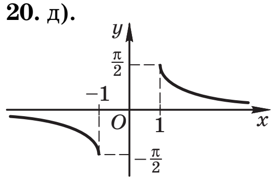
20. в).



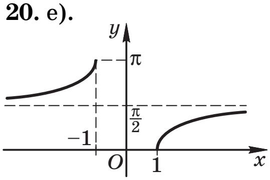
20. г).



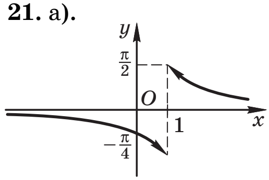
20. д).



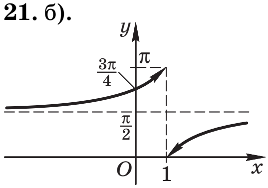
20. е).



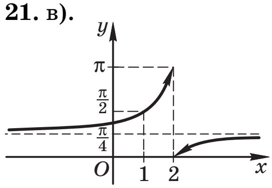
21. а).



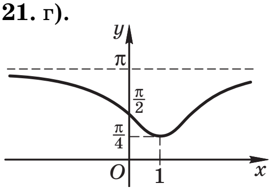
21. б).



21. в).

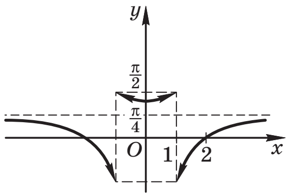


21. г).

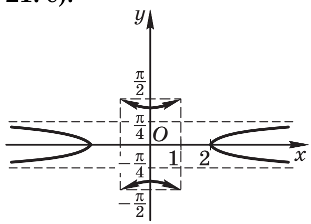


● Предварительно постройте график функции $y = 2x - x^2$, а затем график функции $y = \text{arcctg}\,(2x - x^2)$.

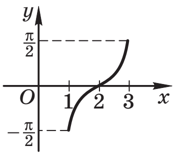
21. д).



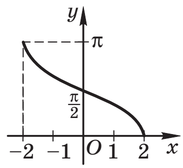
21. е).



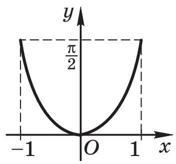
22. а)



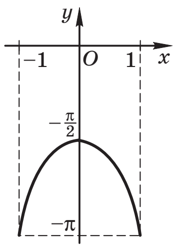
22. б).



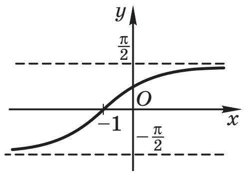
22. в).



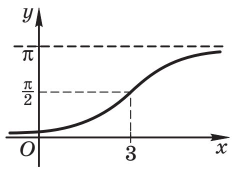
22. г).



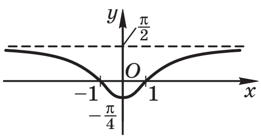
23. а).



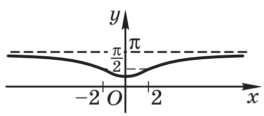
23. б).



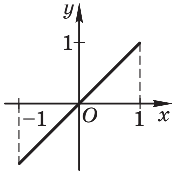
23. в).



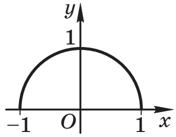
23. г).



24. а)



24. б)



25. ▲ а) Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда по формуле для производной обратной функции $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ (где $g(x) = \arcsin x$) находим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

б) доказательство аналогично проведенному в п. а); в) ▲ пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)+1} = \frac{1}{1+x^2};$$

г) доказательство аналогично проведенному в п. в).

26. а) $-\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$; б) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$;

г) $\arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $-\dfrac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;

е) $\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$. **27.** а) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; б) $-\dfrac{2^x \ln 2}{1+4^x}$; в) $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$;

г) $-\dfrac{1}{1+x}\sqrt{2x(1-x)}$. **28.** а) 4; б) $3\sqrt{2}$; в) 1,5; г) 0,8. **29.** а) $y = \dfrac{15x}{4} - \dfrac{3}{4} + \arcsin\dfrac{3}{5}$; б) $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$. **30.** а) {0}; б) {0}. ▲ Данная функция дифференцируема в любой точке $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому ее критическими точками могут быть лишь те значения x_0, в которых $y'(x_0) = 0$. Дифференцируя, получаем $y'(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$.

Уравнение $\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ имеет единственное решение $x = 0$ (функция $\varphi(x) = y'(x)$ — нечетная, принимающая только положительные значения при всех $x > 0$). **31.** $\max\limits_{[0;1]} y = y(0) = \dfrac{\pi}{4}$; $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) = 0$.

§ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. а) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\dfrac{\pi}{8} + \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{2} \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\frac{2\pi}{3} + (-1)^n \cdot 2 \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2 \mid n \in \boldsymbol{N}\right\}$;

2. а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\frac{7\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{-\frac{\pi}{6} \pm \arccos \frac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

● Представьте левую часть уравнения в виде $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

д) $\{\pm\sqrt{2\pi n} \mid n \in \boldsymbol{Z}_0\}$;

3. $\left\{\pi n + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Покажите, что уравнение $\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 12k - 1$ имеет решение лишь при $k = -1$, уравнение $\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 12k + 1$ не имеет решений при $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left[-1; \frac{7}{3}\right]$. ● Решите неравенство $\left|\frac{a - 1,5}{2 - 0,5a}\right| \leqslant -1$.

5. а) $\left\{2\pi n \pm \left(\pi - \arccos \frac{2}{3}\right) \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{a}{2} \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in [-2; 2]$. Функция не имеет критических точек, если $a \notin [-2; 2]$.

6. а) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{6} \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{2\pi n - \frac{3\pi}{14} \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

г) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{12} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Представьте левую часть уравнения в виде $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

7. а) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 2 - \frac{\pi}{6} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{2\pi n + \frac{3\pi}{2} + 6 \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\{\pi n + \operatorname{arcctg}(\sqrt{7} - \sqrt{2}) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

8. а) $\left\{\pi n;\ 2\pi n \pm \frac{3\pi}{4} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{2\pi n \pm \frac{\pi}{6};\ 2\pi n + \frac{\pi}{2} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\frac{\pi n}{3};\ \frac{2\pi n}{3} \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \middle| \; \middle| n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4};\ 2\pi n \pm \frac{\pi}{3} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **9.** а) $\left\{\pi n + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{2\pi n \pm \frac{\pi}{3} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\pi n + (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} \;\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{2\pi n \pm \frac{2\pi}{3} \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; д) $\left\{\pi(5n + 2) + \frac{\pi}{2};\ 5\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

е) $\left\{\pi n;\ 2\pi n + \frac{\pi}{6} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **10.** а) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4};\ \pi n + \operatorname{arctg} 3 \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\pi n - \operatorname{arctg}\frac{1}{2};\ \pi n + \operatorname{arctg} 2 \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{6};\ \pi n + \frac{\pi}{3} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\pi n + \frac{3\pi}{4};\ \pi n + \operatorname{arcctg} 2 \;\middle|\; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **11.** а) $\left\{\pi n + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\{\pi n + (-1)^n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; в) $\left\{2\pi n + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \middle| \; n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Используя формулы для логарифмов произведения и частного, приведем уравнение к виду

$$\log_2 \frac{3\sin x}{\cos x(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = 1 \text{ или } 3\operatorname{tg} x = 2(1 - \operatorname{tg}^2 x).$$

Решив теперь уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получаем $(\operatorname{tg} x)_1 =$ $= -2$ и $(\operatorname{tg} x)_2 = \frac{1}{2}$. Так как мы в результате преобразований получили уравнение, не равносильное данному, то необходимо осуществить проверку. Решениями исходного уравнения могут быть лишь те значения x, при которых совместна система неравенств

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ 1 - \operatorname{tg} x > 0, \\ 1 + \operatorname{tg} x > 0. \end{cases}$$

Решения уравнения $\operatorname{tg} x = -2$ не удовлетворяют неравенству $1 + \operatorname{tg} x > 0$ системы, поэтому они являются посторонними. Уравнение $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ имеет решения $x = \pi k + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Проверив их подстановкой в неравенства $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, устанавливаем, что эти неравенства будут выполняться при $k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

12. а) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin 2(2 - \sqrt{3}) \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin (1 - \sqrt{3 - 2a}) \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$, при $a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

$\varnothing$ при $a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$; г) $\left\{\frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\frac{\pi n}{5}; \frac{2\pi n}{5} \pm \frac{1}{5} \arccos \frac{1}{4}\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

13. а) $\left\{\pi n + (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{33} - 3}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{5} + (-1)^n \frac{\pi}{20} - \frac{6}{5} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Используйте формулу $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$;

г) $\left\{2\pi n \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2a} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \neq 0$, $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a = 0$.

14. а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in -\boldsymbol{N};\ \frac{3}{2};\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \mid m \in \boldsymbol{N}\right\}$. ▲ Данную функцию после простейших преобразований можно представить в виде $f(x) = 2\cos x - |2x - 3| + e^3 - 2$. Отсюда видно, что она дифференцируема всюду, кроме точки $x = \frac{3}{2}$, т. е. эта точка является критической. Имеем $f(x) = 2\cos x + 2x + e^3 - 5$ при $x < \frac{3}{2}$, $f(x) = 2\cos x - 2x + e^3 + 1$ при $x > \frac{3}{2}$. Другие критические точки находим, продифференцировав функцию и приравняв производную нулю (с учетом неравенств);

б) $\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) \middle| m = 1, 0, -1, -2, \ldots; 2; \frac{1}{6}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \middle| n = 3, 4, 5 \ldots\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{2}(2n + 1) \mid n \in \boldsymbol{Z};\right\}$

г) $\left\{2\pi n \pm \frac{3\pi}{4} \middle| n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Данная функция дифференцируема в каждой точке промежутка $(-\infty; +\infty)$. Дифференцируя и приравнивая нулю производную, получаем уравнение $2\cos^2 x + (\sqrt{2} - 2\sqrt{5})\cos x - \sqrt{10} = 0$. Отсюда следует, что $\cos x = \sqrt{5}$ (множество решений этого уравнения пусто) и $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 2\pi n \pm \frac{3\pi}{4}$; $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

15. а) $\{\pi(2\pi + 1) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. ▲ Учитывая, что $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$, приведем уравнение к виду $\cos^3 x + \cos^2 x - 2(\cos x + 1) = 0$, или $(\cos x + 1)(\cos^2 x - 2) = 0$. Таким образом, имеем два уравнения: $1 + \cos x = 0$, решение которого есть $x = 2\pi n + \pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\cos^2 x - 2 = 0$, которое решений не имеет;

б) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; 2\pi n \pm \left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) \middle| n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4};\ \pi n \pm \frac{\pi}{3} \middle| n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Воспользуйтесь тождеством $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$ и приведите уравнение к виду $(\operatorname{tg} x + 1) \times (\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$; г) $\left\{2\pi n; 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}; 2\pi n \pm \arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

16. а) $\{\pi n + \operatorname{arctg} 5 \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. ▲ Обе части уравнения ни при каком x не обращаются в нуль одновременно: разделив уравнение на $\cos x$, получим уравнение $\frac{\sin x}{\cos x} = 5$, или $\operatorname{tg} x = 5$, равносильное данному. Решения последнего уравнения имеют вид $x = \pi n + \operatorname{arctg} 5 \mid n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; д) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2}; \pi n + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

17. а) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4}; 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\pi n + \operatorname{arctg} 2 \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{2\pi n; \pi n + \frac{\pi}{4} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Преобразуйте правую часть уравнения к виду $(\cos x - \sin x)^2 + \cos^2 x - \sin^2 x$.

18. а) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \operatorname{arctg} 2 \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Так как $\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x не обращаются в нуль, то можно разделить уравнение на $\cos^2 x$. Получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0, \tag{1}$$

равносильное исходному. Из уравнения (1) получаем уравнения $\operatorname{tg} x = -1$, и $\operatorname{tg} x = -2$, решения которых находим по известным формулам;

б) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4}; \pi n - \operatorname{arctg} \frac{1}{4} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\pi n + \operatorname{arctg} 2; \pi n - \operatorname{arctg} \frac{3}{5} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\pi n + \operatorname{arctg} 2; \pi n - \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \middle| \ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Представьте правую часть уравнения в виде $-2(\sin^2 x + \cos^2 x)$;

д) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4};\ \pi n + \operatorname{arctg} 5 \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **19.** а) $\{\pi n - \operatorname{arctg} \sqrt[3]{4} \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$;

б) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4};\ \pi n \pm \frac{\pi}{3} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Преобразуем правую часть уравнения: $3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3 = 3\sin x \cos x - 3 \sin^2 x + 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 \cos x(\sin x + \cos x)$. Теперь имеем уравнение $\sin^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = 3 \cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x)$, или $(1 + \operatorname{tg} x)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0$, решение которого сводится к решению уравнений $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Представьте правую часть уравнения в виде $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$;
г) $\left\{\frac{\pi n}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a = 0$; $\left\{\pi n + \operatorname{arctg} \frac{1}{2a};\ \pi n + \operatorname{arctg} \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16a^2}}{4a} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \neq 0$.

20. а) $\left\{\frac{\pi n}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{3} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\{\pi n + \operatorname{arctg} (6 \pm \sqrt{3}) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$;

в) $\left\{\pi n + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\pi n - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{6} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **21.** а) $\left\{2\pi n;\ 2\pi n + \frac{\pi}{3} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{12},\ 2\pi n + \frac{7\pi}{12} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{2\pi n}{5} - \frac{\pi}{5};\ \frac{2\pi n}{5} + \frac{2\pi}{15} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{2\pi n;\ 2\pi n + \frac{\pi}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; д) $\left\{2\pi n + \frac{5\pi}{3} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

22. а) $\left\{\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{12}(2n+1);\ \frac{\pi}{8}(1-2n)\,\middle|\, n \in \boldsymbol{N}\right\}$;

б) $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; $\varnothing$ при $a \notin [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; в) $\left\{\pi n + \frac{7\pi}{12}\,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\frac{\pi n}{4}\,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\text{, кроме } n = 4k+2 \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

23. а) $\left\{\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{12}\,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\text{, кроме } n = 1+3m \mid m \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\varnothing$; в) $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

▲ Исходное уравнение равносильно уравнению

$$2(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} 2x\,(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x). \qquad (1)$$

Найдем значения x, при которых $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x = 0$. Последнее уравнение эквивалентно уравнению $\frac{\cos x}{\cos 2x \cos 3x} = 0$. Это уравнение не имеет решений, так как если $\cos x = 0$, то и $\cos 3x = 0$. Следовательно, уравнение (1) можно разделить на $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \neq 0$; имеем $2\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x} = \operatorname{tg} 2x$, или $2\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, или $\operatorname{tg} x = 0$.

Решив уравнение $\operatorname{tg} x = 0$, получаем $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, и после проверки выполнения условий $x \neq \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$ и $x \neq \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{6}\,\Big|\, k \in \boldsymbol{Z}$, устанавливаем, что $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ — решение исходного уравнения; г) $\{90°n + 25° \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

24. а) $\{2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. ● Используйте тождество $\sin x = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

б) $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{2}\,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Используйте тождество $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

в) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\{2\pi n \pm 2\operatorname{arctg} 5 \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$;

д) $\left\{2\pi n \pm 2\operatorname{arctg} 3;\ 2\pi n \pm 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{11} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; е) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

25. Нет. ▲ Множества решений первого уравнения $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4};\ \pi n + \frac{\pi}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ и второго — $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ не совпадают, поэтому уравнения неравносильны.

Замечание. Тождества $\sin\alpha = 2\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ и $\cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ имеют место, когда $\cos\alpha \neq -1$.

26. а) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2};\ \pi n \pm \frac{\pi}{3} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\cos x \times (4\cos^2 x - 1) = 0$, или $\cos x\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0$, решая которое получаем ответ;

б) $\left\{\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi n}{3} \pm \frac{2\pi}{9} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $\cos(3 \cdot 3x) - 4\cos^2 3x = 0$ и положите $\cos 3x = t$;

в) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi n}{2} \pm \frac{\pi}{12} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $2\cos(2 \cdot 2x) = 1 + \cos(3 \cdot 2x)$ и положите $\cos 2x = t$.

27. а) $\{3\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. ● Используйте тождество $\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{2\pi n;\ 4\pi n \pm \frac{2\pi}{3} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6};\ 2\pi n + \frac{\pi}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Используйте тождества $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = \sin 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ и положите $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = y$.

28. $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

29. а) $\{2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup (5;\ +\infty)$, $\left\{2\pi n;\ 4\pi n \pm 2 \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{4a+5}}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left[-\frac{5}{4};\ 1\right]$, $\left\{2\pi n;\ 4\pi n \pm 2 \arccos \frac{\sqrt{4a+5} - 1}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in [1;\ 5]$. ▲ Разложив $\sin \frac{3x}{2}$ по формуле синуса тройного угла, получаем уравнение $\sin \frac{x}{2}\left(2\cos \frac{x}{2} + 3 - 4\sin^2 \frac{x}{2} - a\right) = 0$ или

$$\sin \frac{x}{2}\left(4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} - 1 - a\right) = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, имеем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ 4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} - 1 - a = 0. \end{array}\right.$$

Уравнение $\sin \frac{x}{2} = 0$ имеет решение $x = 2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}$ при любом $a \in \boldsymbol{R}$. Полагая $\cos \frac{x}{2} = t$, получаем квадратное уравнение относительно t:

$$4t^2 + 2t - 1 - a = 0, \qquad (2)$$

причем уравнение (2) может иметь решения лишь при тех значениях $a \in \boldsymbol{R}$, при которых $t \in [-1;\ 1]$. Находим корни уравнения (2): $t_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a+5}}{4}$; $t_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a+5}}{4}$. Решив далее неравенства $-1 \leqslant t_1 < 0$ и $-1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, устанавливаем, что корень t_1 существует, если $a \in \left[-\frac{5}{4};\ 1\right]$, а корень t_2 существует, если $a \in \left[-\frac{5}{4};\ 5\right]$. Следовательно, уравнение $\cos\frac{x}{2} = t_1$ имеет решения $x = 4\pi n \pm 2\arccos\frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при $a \in \left[-\frac{5}{4};\ 1\right]$, а уравнение $\cos\frac{x}{2} = t_2$ — решения $x = 4\pi n \pm 2\arccos\frac{\sqrt{4a+5}-1}{4}\Bigg|$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при $a \in \left[-\frac{5}{4};\ 5\right]$. Учитывая, что на отрезке $\left[-\frac{5}{4};\ 1\right]$ уравнение (2) имеет два решения, получаем ответ;

б) $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right)$, $\left\{\pi n;\ \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1-a}{2a}\ \Big|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left[\frac{1}{3};\ 1\right]$, $\left\{\pi n;\ \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1-a}{2a};\ \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1+a}{2a}\right)\Big|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

30. $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\ \Big|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, $\varnothing$ при $c^2 > a^2 + b^2$. ▲ Так как $a^2 + b^2 \neq 0$, то, разделив уравнение на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (1)$$

равносильное исходному. Числа $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ по абсолютной величине не превосходят единицы и удовлетворяют тождеству $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Поэтому можно положить $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi = \cos (x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет решение, если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$, или $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, откуда получаем

$$x - \varphi = 2\pi k \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (3)$$

Значение вспомогательного аргумента найдем из системы уравнений

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

значит, $\varphi = 2\pi m + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \Big|\ m \in \boldsymbol{Z}$. (Здесь мы предполагаем, что $a > 0$; если $a = 0$, то исходное уравнение сводится к простейшему уравнению $b \sin x = c$; если же $a < 0$, то коэффициент перед $\cos x$ можно сделать положительным, умножив уравнение на -1.) Подставляя полученное значение в условие (3), находим

$$x = 2\pi (m + k) \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

или

$$x = 2\pi n \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

так как $(m + k) \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Если принять $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi$, то уравнение (2) примет вид $\sin (x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

31. а) $\left\{2\pi n \pm \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} + \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \Big|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{2\pi n \pm \arccos \frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \Big|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$, $\varnothing$ при $a \in (-\infty; -\sqrt[4]{2}) \cup (\sqrt[4]{2}; +\infty)$;

в) $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{a}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in [-\sqrt{10}\,;\ \sqrt{10}\,]$, $\varnothing$ при $a\ (-\infty;\ -\sqrt{10}\,) \cup (\sqrt{10}\,;\ +\infty)$. ▲ Разделив данное уравнение на $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ и положив $\frac{3}{\sqrt{10}} = \cos\varphi$; $\frac{1}{\sqrt{10}} = \sin\varphi$, получим $\cos 2x\ \cos\varphi + \sin 2x\ \sin\varphi = \cos(2x - \varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Уравнение $\cos(2x - \varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}$ имеет решение, если $\left|\frac{a}{\sqrt{10}}\right| \leqslant 1$, или $-\sqrt{10} \leqslant a \leqslant \sqrt{10}$. Таким образом, $2x - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = 2\pi n \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{10}}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при $|\,a\,| \leqslant \sqrt{10}$. Отсюда получаем ответ;

г) $\left\{\frac{\pi n}{6} \pm \frac{1}{12}\arccos\frac{2a+17}{\sqrt{137}} + \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{4}{11} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left[\frac{-\sqrt{137}-17}{2};\ \frac{\sqrt{137}-17}{2}\right]$, $\varnothing$ при $a \in \left(-\infty;\ \frac{-\sqrt{137}-17}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\sqrt{137}-17}{2};\ +\infty\right)$. ● Используйте формулы $\sin^2 6x =$ $= \frac{1-\cos 12x}{2}$, $\cos^2 6x = \frac{1+\cos 12x}{2}$, $\sin 6x\ \cos 6x = \frac{1}{2}\sin 12x$.

32. $p \in [\sqrt{5} - 1;\ 2]$.

33. $\left\{\frac{2\pi n}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos\frac{a}{5} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a\ [-5;\ 5]$; при $a \notin [-5;\ 5]$ функция критических точек не имеет.

34. а) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{8} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{4\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5};\ \frac{4\pi n}{3} + \frac{2\pi}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\frac{\pi n}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8};\ \pi n + \frac{3\pi}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$; е) $\left\{n;\ \frac{-1 \pm \sqrt{4l+3}}{2} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z},\ l \in \boldsymbol{Z}_0\right\}$.

35. а) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\frac{\pi n}{4}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{12};\ 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\pi n;\ 2\pi n \pm \frac{\pi}{6}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

36. а) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4};\ \pi n + \frac{\pi}{2}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\frac{2\pi n}{3};\ \pi n + \frac{\pi}{4};\ 2\pi n - \frac{\pi}{2}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{\pi n}{2}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

37. а) $\left\{\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{48};\ \frac{\pi n}{4} + \frac{3\pi}{32}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Преобразуйте уравнение к виду $\sin 10x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$;

б) $\{x_0 \mid x_0 \in \boldsymbol{R}$, кроме $x_0 = \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; в) $\left\{\frac{\pi n}{5};\ \pi n \pm \frac{3\pi}{8}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

● Преобразуйте уравнение к виду $\frac{\sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x}{\cos 2x} + \sqrt{2}\sin 5x = 0$;

г) $\left\{4\pi n + \frac{17\pi}{6};\ \frac{8\pi n}{3} - \frac{5\pi}{18};\ \frac{8\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Преобразуйте правую часть уравнения к виду $2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right)$.

38. а) $\left\{\frac{2\pi n}{5};\ \pi n + \frac{\pi}{2};\ 2\pi n + \pi \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Преобразуйте уравнение к виду $(\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$; б) $\left\{\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{24} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8};\ \frac{\pi n}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\frac{\pi n}{5} + (-1)^{n}\frac{\pi}{30};\ \frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{16};\ \pi n + \frac{3\pi}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

39. а) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2};\ \pi n + (-1)^n\frac{\pi}{6};\ 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{7}(2n+1) \mid n \in \boldsymbol{Z}\text{, кроме } n = 7l - 4 \mid l \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Преобразуем уравнение: $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} = \frac{2\sin 3x\cos x}{2\sin x\cos x\sin 4x}$, $\sin 4x - \sin 3x = 0$; $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{7x}{2} = 0$.

Из решений последнего уравнения нужно отобрать те, при которых $\sin x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$, $\sin 4x \neq 0$. Имеем $\sin\frac{x}{2} = 0$, $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — постороннее решение, знаменатели всех дробей исходного уравнения обращаются в нуль;

$$\cos\frac{7x}{2} = 0,\ x = \pi\frac{2n+1}{7}.$$

Исключим из этого решения значения n, при которых $x = \frac{\pi m}{4}$ (этого достаточно, так как все решения уравнений $\sin x = 0$, $\sin 2x = 0$ являются решениями уравнения $\sin 4x = 0$). Имеем уравнение $\pi\frac{2n+1}{7} = \frac{\pi m}{4}$, или $7m = 8n + 4$; $m = n + \frac{n+4}{7}$.

Таким образом, если $\frac{n+4}{7} = l$, $l \in \boldsymbol{Z}$, то существуют целые m, при которых уравнение теряет смысл. Окончательно получим $x = \pi\frac{2n+1}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, кроме $n = 7l - 4 \mid l \in \boldsymbol{Z}$.

г) $(-\infty;\ +\infty)$ при $a \in \{k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$, $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{1\pm\sqrt{5}}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in (-\infty;\ +\infty)$.

40. $\left\{\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{8};\ \pi n\pm\frac{\pi}{3}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. **41.** а) $\{\pi n\mid n\in\boldsymbol{Z}\}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{3}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Имеем $\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-$

$-\frac{\sin 2x}{\cos x\cos 3x}=\frac{\sin 2x(\cos x\cos 3x-\cos 2x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=0.$

Решив уравнение, найдем $x_1=\pi n\mid n\in\boldsymbol{Z}$, $x_2=\frac{\pi m}{2}\,\Big|\ m\in\boldsymbol{Z}$, и $x_3=\frac{\pi l}{3}\,\Big|$ $l\in\boldsymbol{Z}$. Уравнение $x=\frac{\pi l}{3}$ является следствием уравнения $x=\pi n$ и уравнения $x=\frac{\pi m}{2}$ (при $m=2p$, $p\in\boldsymbol{Z}$). Нечетные значения m дают посторонние решения. Итак, $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

42. а) $\left\{\frac{\pi n}{10}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 9x)=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 11x)$, или $\cos 9x-$ $-\cos 11x=0$. Преобразуя разность косинусов в произведение, получаем уравнение $2\sin x\sin 10x=0$, из которого находим решения $x=\pi k$, $x=\frac{\pi n}{10}$, $k,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Учитывая, что решения первого уравнения являются решениями второго (при $k=10n$), получим ответ;

б) $\left\{\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{n-\frac{5}{12};\ n+\frac{1}{4}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. **43.** а) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ \pi n\pm\frac{\pi}{6}\,\middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Умножив данное уравнение на 2 и применив тождество $1-\cos\alpha=$ $=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, приведем уравнение к виду $2\sin^2 2x-(\cos 2x-\cos 6x)=$ $=0$. Преобразуя далее разность косинусов в произведение синусов, получаем $2\sin^2 2x - 2\sin 2x \sin 4x = 0$. Из последнего уравнения находим $x = \frac{\pi n}{2}$ и $x = \pi n \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{10} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi n}{11} + \frac{\pi}{11};\ \frac{2\pi n}{5} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **44.** а) $\left\{\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

● Приведите уравнение к виду

$$2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 3x = \cos\frac{x}{2}$$

и преобразуйте левую часть, используя формулу

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

б) $\left\{\frac{2\pi n}{7} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\text{, кроме } n = 7k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Умножьте уравнение на $2\sin\frac{x}{2}$.

45. а) $\left\{\frac{\pi n}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x \cos 3x(1 - \cos 2x) + \cos x \sin 3x\ (1 + \cos 2x) = -\frac{3}{4}$, или $(\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x) + \cos 2x\ (\sin 3x \times \cos x - \cos 3x \sin x) = -\frac{3}{4}$, или $\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 4x = -\frac{3}{4}$. Теперь имеем уравнение $\sin 4x = -\frac{1}{2}$, решив которое получим ответ;

б) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{8} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **46.** а) $\left\{\frac{\pi n}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Разложим левую часть уравнения в сумму тригонометрических функций:

$$\frac{1}{2}\sin x\left(2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}(2\sin x\cos 2x + \sin x) =$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x + \sin x) = \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Решив теперь уравнение $\sin 3x = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$, получаем ответ;

б) $\left\{\frac{2\pi n}{3} \pm \frac{2\pi}{9} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{9} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

47. а) $\left\{\pi n;\ \pi n \pm \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Преобразуйте данное уравнение к виду $\frac{\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x}{\cos x \sin 3x} = 3$;

г) $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right);\ \pi n \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **48.** а) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{8} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4};\ \pi n + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Воспользуйтесь тождеством $8 \sin^6 x = (1 - \cos 2x)^3$;

г) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4};\ \pi n \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Примените формулы $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$, $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$;

д) $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right\}$.

49. а) $\{\pi n \pm \arccos(3 - 2\sqrt{3 - a^2})\}$ при $a \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$, $\varnothing$ при $a \notin [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; б) $\left\{\frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{7}{16a - 1} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$, $\varnothing$ при $a \in \left(-\frac{3}{8};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in (-\infty; 6] \cup [8; +\infty)$; $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{4} \arccos(a - 7) \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in (6; 8)$.

50. а) $\left\{\frac{\pi(4n+1)}{2};\ \pi(2n+1)\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Полагая $\sin x - \cos x = y$, имеем $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x = y^2$, или $\sin 2x = 1 - y^2$. Исходное уравнение примет вид $y^2 + 12y - 13 = 0 \Rightarrow y_1 = 1;\ y_2 = -13$. Таким образом, получим два уравнения: $\sin x - \cos x = y_1 = 1$, решения которого имеют вид $x_1 = \pi(2n+1)$, $x_2 = \frac{\pi(4n+1)}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\sin x - \cos x = y_2 = -13$, которое не имеет решений; б) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)$ и положите $\sin x + \cos x = y$;

в) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{4};\ 2\pi n + \frac{11\pi}{12};\ 2\pi n - \frac{5\pi}{12}\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{2\pi n;\ 2\pi n + \frac{\pi}{2}\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{2};\ \pi n - \frac{\pi}{4} + (-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $\sin x(1 + \sin x) + \cos x\,(1 - \sin^2 x) = (1 + \sin x)(\sin x + \cos x - \sin x\cos x) = 0$;

е) $\left\{\left(4\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2;\ \left(4\pi n + \frac{11\pi}{6}\right)^2\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}_0;\ \left(4\pi m - \frac{5\pi}{6}\right)^2\ \middle|\ m\in\boldsymbol{N}\right\}$.

51. а) $\{2\pi n\mid n\in\boldsymbol{Z}\}$ при $a \in \{-1\} \cup (-2(\sqrt{2} - 1);\ 2(\sqrt{2} + 1))$, $\left\{2\pi n;\ 2\pi n \pm \left(\pi - \arccos\frac{a+2}{a\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ -2(\sqrt{2} - 1)] \cup [2(\sqrt{2} + 1);\ +\infty)$; б) $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{4}\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $b \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$, $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{4};\ 2\pi n \pm \arccos(2b - 1) - \frac{\pi}{4}\ \middle|\ n\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $b \in [0;\ 1]$;

в) $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4};\right.$ $\left.\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin\left(a\sqrt{2} + 2\right) \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

52. $\left\{2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **53.** а) $\left\{2\pi n + \frac{5\pi}{6} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Решим исходное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$ ($\sin x$ принимаем за параметр):

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{-2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Полученное уравнение будет иметь решения, если $\sin x = \frac{1}{2}$; тогда $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и мы приходим к системе уравнений

$$\sin x = \frac{1}{2}, \ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из первого уравнения системы имеем $x_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = 2\pi n + \frac{5\pi}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Второму уравнению системы удовлетворяют лишь значения x_2;

б) $\left\{\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. в) $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{4} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Преобразуйте уравнение к виду $\cos^2 2x + \sin^4\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$, а затем решите систему уравнений $\cos 2x = 0$, $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$.

54. а) $\{2\pi(1 + 4n) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. ▲ После несложных преобразований уравнение приводится к виду

$$\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2. \qquad (1)$$

Так как $\sin\frac{5x}{4} \leqslant 1$, $\cos x \leqslant 1$, то для выполнения равенства (1) необходимо одновременное выполнение равенств $\cos x = 1$ и $\sin\frac{5x}{4} = 1$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$x = 2\pi k,\ \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi l,$$

где k, l — некоторые целые числа. Исключая x из этой системы, придем к уравнению $4l = 5k - 1$, или $l = k + \frac{k-1}{4}$. Последнее уравнение имеет решение в целых числах, если $\frac{k-1}{4} = n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Окончательно получаем $k = 4n + 1 \mid n \in \boldsymbol{Z}$ и $x = 2\pi(4n + 1)$;

б) $\left\{\frac{\pi n}{3};\ 2\pi n - \frac{\pi}{2}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

55. а) $\left\{\pi n - \operatorname{arctg}\frac{1}{6};\ \pi n - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Воспользуйтесь тем, что $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = |\operatorname{tg} x|$; б) $\bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}}\left[2\pi n - \frac{\pi}{3};\ 2\pi n + \frac{2\pi}{3}\right]$. ● Воспользуйтесь тем, что $\sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x} = 2\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$.

56. а) $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{6}\middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Решениями данного уравнения могут быть лишь те значения x, при которых $\cos 2x > -\frac{1}{4}$. Возводя уравнение в квадрат и выполнив преобразования, получаем уравнение $8\cos^2 2x + 10\cos 2x - 7 = 0$, из которого имеем $\cos 2x = -\frac{7}{4}$ и $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Уравнение $\cos 2x = -\frac{7}{4}$ решений не имеет, а решение второго уравнения является решением исходного $\left(\cos 2x = \frac{1}{2} > -\frac{1}{4}\right)$; б) $\{2\pi n + \operatorname{arctg} a \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a \in (0; +\infty)$, $\{\pi(2n + 1) + \operatorname{arctg} a \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a\ (-\infty; 0)$, $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a = 0$.

57. а) $\left\{2\pi n + \frac{3\pi}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\,\cos 2x, \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая уравнение системы, имеем $\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$, откуда придем к уравнению $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Решениями последнего являются $x = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$ (постороннее, так как не выполняется неравенство системы) и $x = 2\pi n + \frac{3\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяющее всем условиям системы;

б) $\left\{2\pi n - \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{8};\ 2\pi n - \frac{3\pi}{8} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\frac{\pi n}{2};\ \pi n + \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; д) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{2};\ 2\pi n - \frac{\pi}{6} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

е) $(-\infty; +\infty)$ при $a = 0$; $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a(-\infty; +\infty)$.

58. а) $\left\{2\pi n;\ 2\pi n - \frac{\pi}{2} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{2\pi n + \frac{3\pi}{8};\ 2\pi n + \frac{7\pi}{8};\ 2\pi n + \pi;\ \pi n + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ● Приведите уравнение к виду $(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \cos 2x - \sin 2x) = 0$ и учтите условие $\sin x - \cos x \geqslant 0$;

в) $\left\{2\pi n;\ \pi n - \frac{\pi}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\frac{\pi n}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\pi n + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; е) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{12};\ 2\pi n - \frac{7\pi}{12} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

59. а) $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{6};\ \frac{2}{3}\pi l + \frac{5\pi}{18} \,\middle|\, n, l \in \boldsymbol{Z}, \text{ кроме } l = 3m + 2 \mid m \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{4\pi n + \frac{13\pi}{6} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **60.** $\left\{2\pi n \pm \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(a - \frac{5}{6a}\right)^2\right) \right|$

$n \in \boldsymbol{Z}\Big\}$ при $a \in \left[\sqrt{\dfrac{5}{6}},\ \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right]$, $\varnothing$ при $a \notin \left[\sqrt{\dfrac{5}{6}};\ \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right]$.

61. а) $\left\{2\pi n + \arccos\dfrac{1}{3}\,\Big|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Преобразуем правую часть уравнения:

$$(\log_5 4)\log_4(3\sin x) = \frac{\log_4(3\sin x)}{\log_4 5} = \log_5(3\sin x).$$

Тогда получим уравнение $\log_5 \operatorname{tg} x = \log_5(3\sin x)$, эквивалентное системе $\begin{cases}\operatorname{tg} x = 3\sin x,\\ \sin x > 0.\end{cases}$ Решив уравнение системы, получаем $\cos x = \dfrac{1}{3}$ $(\sin x \neq 0)$, откуда $x_1 = 2\pi n + \arccos\dfrac{1}{3}$ и $x_2 = 2\pi n - \arccos\dfrac{1}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Второе решение (x_2) не удовлетворяет неравенству системы и является посторонним;

б) $\left\{2\pi n + \arccos\dfrac{1}{10}\,\Big|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **62.** а) $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. ● Приведите уравнение к виду $2^{2\cos^2 x - 1} = 3\cdot 2^{\cos^2 x} - 4$ и положите $2^{\cos^2 x} = t$;

б) $\left\{\log_2\left(\dfrac{\pi n}{4} + \dfrac{\pi}{8}\right) n \in \boldsymbol{Z}_0\right\}$. **63.** а) $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi m}{5}\,\Big|\ n, m \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

▲ Последовательно преобразуя, имеем $\cos 3x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$, $\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, откуда получаем ответ.

Замечание. Два полученных множества решений не имеют общих точек.

б) $\left\{\dfrac{3\pi}{4} + \pi n;\ \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi m}{2}\,\Big|\ n, m \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi m}{4}\,\Big|\ n, m \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2\pi m}{7}\,\Big|\ n, m \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

64. а) $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4};\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m \mid n,\ m \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Преобразуя сумму косинусов в произведение, приходим к уравнению

$$2\cos 4x \cos x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x\ (2\cos x - 1) = 0.$$

Решив уравнение $\cos 4x = 0$, получаем

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Уравнение $2\cos x - 1 = 0$ имеет решения $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$.

б) $\left\{\frac{\pi n}{6};\ \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi m}{3} \middle|\ n,\ m \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\frac{\pi n}{3};\ (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m \mid n,\ m \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

65. а) $\left\{\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \mid n,\ m \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Выполнив замену $t = x - \frac{\pi}{4}$, приходим к уравнению

$$2\sin^2 t - 3\sin t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t = \frac{1}{2},\\ \sin t = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ t = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем ответ;

б) $\left\{\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{8}{9} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi k}{2} \middle|\ n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi k \mid n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

66. а) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{12} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{12} + 2\pi m \mid n,\ k,\ m \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

▲ Так как

$$\sqrt{2}\sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

то уравнение примет вид

$$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1,\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x=\frac{7\pi}{12}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z},\\ x=-\frac{\pi}{12}+2\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.$$

б) $\left\{\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k\mid n,\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi n\mid n\in\boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\mid n,\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

67. а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n\mid n\in\boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Применяя для $\cos 4x$ формулу двойного аргумента и раскрывая квадрат суммы $(\sin x+\cos x)^2$, получаем $2(1-2\sin^2 2x)+7(1+\sin 2x)+2=0$, т. е.

$$4\sin^2 2x-7\sin 2x-11=0.$$

Положим $t=\sin 2x$ ($|t|\leqslant 1$) и придем к квадратному уравнению

$$4t^2-7t-11=0\Leftrightarrow t\in\left\{\frac{11}{4};-1\right\}.$$

Значение $t = \frac{11}{4}$ не подходит, так как $\frac{11}{4} > 1$. Решив уравнение $t = -1$, получаем

$$t = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

б) $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} \,\middle|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} \,\middle|\, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **68.** а) $\left\{\frac{3\pi}{2} + 3\pi n;\ 2\pi k \mid n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

▲ Используя формулы $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, получаем

$$\left(4\cos^3\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3}\right) + \cos\frac{x}{3} = 2\cos^2\frac{x}{3},$$

или

$$4\cos^3\frac{x}{3} - 2\cos^2\frac{x}{3} - 2\cos\frac{x}{3} = 0.$$

После сокращения на 2 и подстановки $\cos\frac{x}{3} = t$ имеем

$$2t^3 - t^2 - t = 0, \text{ или } t(t-1)(2t+1) = 0.$$

Если $t = 0$, то $\cos\frac{x}{3} = 0$, т.е. $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда $x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Если же $t = 1$ или $t = -\frac{1}{2}$, то $\cos\frac{x}{3} = 1$ или $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$, т.е. $\frac{x}{3} = \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (из рисунка 15 видно, что точки на тригонометрическом круге повторяются через $\frac{2\pi}{3}$), откуда находим $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\left\{\frac{3\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{4} + \pi k \mid n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

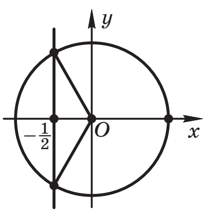


Рис. 15

в) $\left\{\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\{3\pi + 4\pi n;\ 6\pi k \mid n,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$.

69. а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n \mid n\in \boldsymbol{Z}\right\}$; б) $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\,\middle|\, n\in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\,\middle|\, n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

70. а) $\{\pm\operatorname{arctg} 2+2\pi n \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$;

б) $\{-\operatorname{arcctg} 3+2\pi n;\ -\pi+\operatorname{arcctg} 3+2\pi k \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\}$;

в) $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{4}(1-2k) \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

71. а) $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3}+\frac{13\pi}{2};\ 2\pi n\pm\arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3}\right)\middle|\right.$

$\left. n\in \boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\left(\pi n+\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}-\pi n\right)\middle|\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\left(2\pi n\ \pm\ \operatorname{arcccos}\frac{a}{2\cos\frac{\pi}{8}}+\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{8}-2\pi n\ \pm\ \arccos\frac{a}{2\cos\frac{\pi}{8}}\right)\middle|\right.$

$\left. n\in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a\in\left[-2\cos\frac{\pi}{8};\ 2\cos\frac{\pi}{8}\right]$, $\varnothing$ при $a\in\left(-\infty;\ 2\cos\frac{\pi}{8}\right)\cup$

$\cup\left(2\cos\frac{\pi}{8};+\infty\right)$.

72. а) $\left\{\left(\frac{\pi}{5}(n+4k)\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a;\ \frac{\pi}{5}(n-6k)\pm\frac{\pi}{5}+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a\right) \mid n,\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a\ (-\infty;\ 0]$, $\varnothing$ при $a\in(0;+\infty)$;

б) $\left\{\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6};\quad \pi\left(\frac{k}{2}-n\right)+\frac{\pi}{3}\right);\quad \left(\pi\left(\frac{k}{2}+n\right)+\frac{\pi}{3};\right.\right.$

$\left.\left.\pi\left(\frac{k}{2}-n\right)+\frac{\pi}{6}\right)\middle|\ k,\ n\in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{6};\,2\pi k+\frac{\pi}{3}\right);\,\left(2\pi n+\frac{7\pi}{6};\,2\pi k+\frac{4\pi}{3}\right);\right.$

$\left.\left(2\pi n-\frac{\pi}{6};\,2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right);\,\left(2\pi n+\frac{5\pi}{6};\,2\pi n+\frac{5\pi}{3}\right)\,\middle|\;n,\,k\in\boldsymbol{Z}\right\}.$

73. а) $\left\{\left(\pi n-\frac{\pi}{4};\,\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right)\,\middle|\;n,\,m\in\boldsymbol{Z}\right\};$

б) $\left\{2\pi n\pm\frac{3\pi}{4};\,\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\,\middle|\;n,\,m\in\boldsymbol{Z}\right\};$

в) $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};\,2\pi k\pm\arccos\left(-\frac{a}{3}\right)\right)\,\middle|\,n,\,k\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $a\in(-3;\,3]$,

$\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};\,2\pi k\right);\,\left(2\pi n-\frac{\pi}{2};\,\pi(2k+1)\right)\,\middle|\,n,\,k\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $a=-3$,

$\varnothing$ при $a\in(-\infty;\,-3)\cup(3;\,+\infty)$;

г) $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\,\pi k-\operatorname{arctg}(a+2)\right);\,\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\right.\right.$

$\left.\left.\pi k-\operatorname{arctg}a\right)\,\middle|\;n,\,k\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $a\in(-\infty;\,-3]\cup[1;\,+\infty)$,

$\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\,\pi k-\operatorname{arctg}(a+2)\right.\,\middle|\;n,\,k\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $a\in(-3;\,-1)$,

$\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\,\pi k-\operatorname{arctg}a\right)\,\middle|\;n,\,k\in\boldsymbol{Z}\right\}$ при $a\in(-1;\,1)$.

74. а) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi(n+m);\,\pm\frac{\pi}{6}+\pi(n-m)\,\middle|\,n,\,m\in\boldsymbol{Z}\right\};$

б) $\left\{\left(\frac{7\pi}{24}+\pi(n+m);\;\frac{\pi}{24}+\pi(n-m)\right);\,\left(\frac{\pi}{24}+\pi(n+m);\;\frac{7\pi}{24}+\right.\right.$

$\left.+\pi(n-m)\right);\,\left(\frac{\pi}{24}+\pi(n+m);\,-\frac{7\pi}{24}+\pi(n-m)\right);\,\left(-\frac{7\pi}{24}+\pi(n+m);\right.$

$\left.\left.-\frac{\pi}{24}+\pi(n-m)\right)\,\middle|\,n,\,m\in\boldsymbol{Z}\right\}.$

▲ Из уравнений системы следует, что $x+y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi m$. Затем, решив четыре системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \end{cases}$$

получим ответ;

в) $\left\{\left(\frac{\pi}{3} + \pi(n + k); \frac{\pi}{3} + \pi(k - n)\right); \left(-\frac{\pi}{3} + \pi(n + k); -\frac{\pi}{3} + \pi(k - n)\right) \middle| n, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k\right) \middle| n, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. а) $\left(\pi n; \pi n + \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $(4\pi n + 2\pi; 4\pi n + 4\pi)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\left[2\pi n + \frac{7\pi}{12}; 2\pi n + \frac{23\pi}{12}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\left(\pi n - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}; \pi n + \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

д) $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **2.** а) $\left(6\pi n - \frac{3\pi}{2}; 6\pi n + \frac{3\pi}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8}; \frac{\pi n}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\left[2\pi n - \frac{\pi}{6}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\left(4\pi n + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}; 4\pi n + \frac{5\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\{2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}\}$.

3. а) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $(4\pi n - 2\pi; 4\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\left[\pi - \frac{\pi}{12}; \pi n + \frac{\pi}{6}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}; \frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. а) $\left(\pi n+\frac{\pi}{2};\ \pi n+\pi\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\left(\pi n+\frac{\pi}{4};\ \pi n+\frac{\pi}{2}\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$;

в) $\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}2;\ \frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

5. а) $\left(\pi n+\frac{\pi}{6};\ \pi n+\frac{5\pi}{6}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\left(\pi n+\frac{\pi}{3};\ \pi n+\frac{2\pi}{3}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$;

в) $\left[\pi n-\frac{\pi}{4};\ \pi n+\frac{\pi}{4}\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; г) $\left(\pi n+\frac{\pi}{6};\ \pi n+\frac{5\pi}{6}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

6. а) $\left(2\pi n+\arcsin\frac{1}{3};\ 2\pi n+\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(2\pi n+\frac{5\pi}{6};\ 2\pi n+\pi-\arcsin\frac{1}{3}\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\left[2\pi n-\arccos\frac{1}{4};\ 2\pi n+\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(2\pi n+\frac{4\pi}{3};\ 2\pi n+\pi+\arccos\frac{1}{4}\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $(\pi n-\operatorname{arctg}2;\ \pi n+\operatorname{arctg}3)$, $n\in \boldsymbol{Z}$;

г) $(\pi n+\operatorname{arcctg}1{,}5;\ \pi n+\pi-\operatorname{arcctg}4)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

7. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **8.** $\left[2\pi n-\frac{2\pi}{3};\ 2\pi n+\frac{2\pi}{3}\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

9. $\left(\pi n-\operatorname{arctg}2;\ \pi n+\frac{\pi}{3}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

10. $\left(\pi n;\ \pi n+\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi n+\frac{3\pi}{4};\ \pi(n+1)\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

11. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

12. $\left(2n-\frac{1}{8};\ 2n+\frac{7}{8}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ● Используйте формулу $\cos\pi x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)$. **13.** $\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{5\pi}{24};\ \frac{\pi(n+1)}{2}+\frac{\pi}{24}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ● Покажите, что

$$\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

14. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}\cup\left[\pi n-\frac{\pi}{4};\ \pi n-\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\pi n+\frac{\pi}{6};\ \pi n+\frac{\pi}{4}\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

● Воспользуйтесь тем, что $\cos x\cos 2x\cos 3x=$

$$=\cos 2x\,\frac{\cos 2x+\cos 4x}{2}=\frac{\cos 2x(2\cos^2 2x+\cos 2x-1)}{2}$$

15. $\{\boldsymbol{R}\}$, кроме $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **16.** $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ● Учтите, что $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

17. $\left(\pi n + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}; \pi(n+1) - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ● Учтите, что $8\sin^6 x - \cos^6 x = (2\sin^2 x - \cos^2 x)(4\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$. Докажите, что $4\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x > 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$.

18. $\left(\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\pi n + \frac{\pi}{6}; \pi n + \frac{\pi}{4}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

19. $\left(2\pi n - \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}; 2\pi n + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\pi(2n+1); 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ● Положите $\sin x + \cos x = y$.

20. $\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1); \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi + \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1); \frac{5\pi}{4}\right)$.

21. $\left(\pi n + \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \pi(n+1) - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

22. $\left[2\pi n - \frac{7\pi}{6}; 2\pi n + \frac{\pi}{6}\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **23.** $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

24. $\left[n + \frac{1}{4}; n + \frac{3}{4}\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.** $[4n^2\pi^2; (2n+1)^2\pi^2]$, $n \in \boldsymbol{Z}_0$.

26. $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \cup \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}(4n+1)}; -\sqrt{\frac{\pi}{2}(4n-1)}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}(4n-1)}; \sqrt{\frac{\pi}{2}(4n+1)}\right]$, $n \in \boldsymbol{N}$.

27. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. **28.** $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

29. $(-\infty; 0)$, кроме $x = -n$, $n \in \boldsymbol{N}$.

32. ● Исследуйте знак производной функции $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

33. $\{\pi n;\ \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1+2\sin\alpha}{2}\right) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a \in \left(0;\ \frac{\pi}{6}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{5\pi}{6};\ 4\right)$, $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$.

34. $\left\{\pi n;\ \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{2-\cos\alpha}{2} \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left(-1;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a \in \left(\frac{\pi}{2};\ 3\right]$.

35. $\{\pi n \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{cosec} a - 1} \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ при $a \in [2;\ \pi) \cup (2\pi;\ 8)$; при $a \in [\pi;\ 2\pi]$ функция критических точек не имеет.

Глава IV

Задачи на составление уравнений и неравенств

§ 1. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. 60 км/ч. **2.** 2 км/ч. **3.** 60 км/ч. **4.** $39\frac{7}{12}$ км. **5.** 4 км/ч. **6.** 40 км/ч, 120 км/ч. **7.** 36 км/ч или 64 км/ч. **8.** 20 км/ч; 12 км/ч. **9.** 1 км/ч. **10.** 30 км; 6 км/ч; 4 км/ч. ▲ Пусть s — искомое расстояние, v_1 и v_2 — скорости пешеходов, идущих из пунктов A и B соответственно. Расстояния, пройденные пешеходами за равные промежутки времени, относятся, как их скорости. Исходя из этого, получаем систему уравнений

$$\frac{s-12}{12} = \frac{v_1}{v_2}, \ \frac{12+s-6}{s-12+6} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Исключив из этих уравнений $\frac{v_1}{v_2}$, получаем уравнение $s^2 - 30s = 0$, откуда $s = 30$. Скорости пешеходов находим из соотношений $s + 6 = 6v_1$, $s - 6 = 6v_2$.

11. $8a$ км; $\frac{8a}{3b}$ км/ч; $\frac{8a}{5b}$ км/ч. **12.** 10 км. **13.** 18 км/ч. **14.** $l\left(\frac{t_2}{t_1} + 1\right)$ см; $l^2\frac{(t_2+t_1)}{t_1(lt_2+(s+l)t_1)}$ см/с; $\frac{ls}{lt_2+(s+l)t_1}$ см/с. **15.** 20 м/мин; 15 м/мин; 280 м. **16.** $0{,}5\,(8 \pm \sqrt{7})$ ч, 4,5 ч, 3,5 ч, 9,5 ч, $0{,}5\,(8 + \sqrt{127})$ ч. **17.** 10 км/ч; 3 км/ч. **18.** 18 км/ч; 24 км/ч. **19.** 5 км/ч; 4 км/ч. **20.** $0{,}5(b + \sqrt{b^2+4ab})$ км. **21.** $(10 + \sqrt{52})$ км или $(\sqrt{52} \pm 2)$ км. **22.** 15 : 8. **23.** 4 ч. **24.** 18 мин. **25.** В $\sqrt{10}$ раз. ▲ Пусть s — расстояние между пунктами A и B, u — собственная скорость буксира, v — скорость течения. Составим систему уравнений

$$\frac{s}{u+v} = \frac{s}{u-v} = 13, \quad \frac{s}{2u+v} + \frac{s}{2u-v} = 6.$$

Полагая $\frac{u}{v} = x$, $u = xv$ и разделив первое уравнение на второе, получим уравнение $\frac{2sx}{x^2-1} : \frac{4sx}{4x^2-1} = \frac{13}{6}$, откуда найдем x.

26. $a(\sqrt{2}+1)$ ч. **27.** 10 ч; 5 ч. **28.** 3 ч и 6 ч или $\frac{\sqrt{145}-1}{6}$ ч и $\frac{\sqrt{145}+17}{6}$ ч. **29.** $\frac{m(p+n)+2np}{2p}$ мин, $\frac{m(p+n)+2np}{2n}$ мин, $\frac{m(p+n)+2np}{p+n}$ мин. **30.** 36 ч; 45 ч. ▲ Пусть t — время, затраченное автомобилями до их встречи. Составим систему уравнений

$$16v_1 = v_2t,\ 25v_2 = v_1t.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{25}{16}$ или $\frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{4}$, после чего легко найти t. **31.** 3 ч. **32.** 10 ч 29 мин. ▲ Пусть s — расстояние между пунктами A и B, v_1 и v_2 — скорости первого и второго автомобилей соответственно, t — первоначальное время движения автомобилей до встречи. Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} s = (v_1 + v_2)t, \\ s = (2v_1 + v_2)\left(t - \frac{14}{15}\right), \\ s = (v_1 + 2v_2)\left(t - \frac{13}{12}\right). \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \frac{v_1 - v_2}{s} = \frac{1}{t}, \\ \frac{2v_1 + v_2}{s} = \frac{1}{t - \frac{14}{15}}, \\ \frac{v_1 + 2v_2}{s} = \frac{1}{t - \frac{13}{12}}. \end{cases}$$

Складывая два последних уравнения и учитывая первое, имеем уравнение $\frac{3}{t} = \frac{1}{t - \frac{14}{15}} + \frac{1}{t - \frac{13}{12}}$, которое после простых преобразований примет вид $30t^2 - 121t + 91 = 0$, откуда $t_1 = 1$ (постороннее решение) и $t_2 = \frac{182}{60}$. Если скорости обоих автомобилей удвоить, то время движения их до встречи составит $\tau = \frac{s}{2(v_1 + v_2)} = \frac{t_2}{2} = 1$ ч 31 мин. Вычитая этот результат из 12, получаем ответ.

§ 2. ЗАДАЧИ НА РАБОТУ, ПРОЦЕНТЫ, СМЕСИ, ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1. 15 м^3. **2.** 60%. **3.** 25 дней; 20 дней; 30 дней. **4.** 10 дней. **5.** 10 ч; 15 ч. **6.** 16 ч. **7.** В 6 раз. **8.** 3 ч; 6 ч; 2 ч. **9.** 14 ч; 10,5 ч. **10.** $\frac{1}{4}[2(t + d) - \sqrt{2t^2 + 4d^2}]$, $\frac{1}{4}[2\ (t - d) - \sqrt{2t^2 + 4d^2}]$. Задача имеет решение, если $t > 4d > 0$. **11.** 40 м; 25 м. **12.** 45 м черной, 36 м зеленой, 30 м синей. **13.** 50 м^3/мин. **14.** 4,8 ч; 4,8 ч или 4 ч; 6 ч. **15.** 15 ч. ▲ Пусть x — время, в течение которого был открыт второй кран, p_1 и p_2 — скорости поступления воды из первого и второго кранов соответственно. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} p_1(x + 5) + p_2x = 425, \\ 2p_1x = p_2(x + 5), \\ (p_1 + p_2)17 = 425. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений следует, что

$$p_1 = 25\ \frac{x + 5}{3x + 5};\ p_2 = \frac{50x}{3x + 5}.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение, получим $3x^2 - 41x - 60 = 0$, откуда $x = 15$ ($x = -\frac{4}{3}$ — посторонний корень). **16.** 2 ч. **17.** 6 ч. **18.** 10 мин. **19.** $\frac{60(p - 65)}{7(62 - p)}$ кг; $\frac{150(p - 65)}{7(62 - p)}$ кг. Задача имеет решение при $62 < p < 65$. **20.** $\frac{4(q - 70)}{90 - q}$ л. Задача имеет решение при $70 \leqslant q \leqslant 76\frac{2}{3}$. **21.** 25%. **22.** 749 ден. ед. **23.** 0,25 л глицерина; 1,75 л воды. **24.** $\frac{9k+1}{k-1}a\%$. **25.** $\frac{12p}{4a^2-7a+3}\%$. $\frac{12a^2p}{4a^2-7a+3}\%$; $\frac{12ap}{4a^2-7a+3}\%$ **26.** 64; 46. **27.** 63. **28.** 863. **29.** 36 или 63. **30.** 1998. ▲ Пусть x, y, z и u — цифра (соответственно) тысяч, сотен, десятков и единиц искомого числа a:

$$a = 1000x + 100y + 10z + u.$$

Когда к числу a прибавляется x, возможны два случая: 1) $100y + 10z + u + x \geqslant 1000$, 2) $100y + 10z + u + x < 1000$.

В первом случае, с учетом того, что x, y, z и u — цифры, обязательно должно быть $y = 9$, $z = 9$, $u + x \geqslant 10$ и $1000 \leqslant 100y + 10z + u + x \leqslant 1010$. Тогда $a + x = 1000(x + 1) + b$, где число b не может быть трехзначным. Поэтому первый случай в условии задачи не реализуется.

Во втором случае $a + x = 1000x + b$, где $= 100y + 10z + u + x$. По условию $a = 2b$, т. е.

$$1000x + 100y + 10z + u = 2\,(100y + 10z + u + x),$$

или

$$998x = 100y + 10z + u.$$

Так как $100y + 10z + u \leqslant 999$, то последнее равенство возможно только при $x = 1$. Тогда $100y + 10z + u = 998$, откуда $y = 9$, $z = 9$, $u = 8$. **31.** 17 и 34; **32.** 297. **33.** 69. **34.** 64. **35.** 45.

§ 3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

1. 7842. **2.** $\left[4;\ \frac{8+\sqrt{61}}{3}\right]$. **3.** 8. **4.** (3; 5]. **5.** 12. **6.** 180 р. ▲ Пусть x р. — первоначальный взнос каждого студента, y — число студентов в группе, тогда $170 < xy < 195$, $xy = (x + 1)(y - 2)$. Из уравнения получаем $x = \frac{y-2}{2}$. Подставляя это выражение в систему неравенств, найдем, что $1 + \sqrt{341} < y < 1 + \sqrt{391}$. Так как y — натуральное число, то последней системе неравенств удовлетворяют два числа: 19 и 20. Все условия задачи выполняются лишь при $y = 20$, $x = 9$, поэтому $xy = 9 \cdot 20 = 180$. **7.** 9 р.

8. 3 т. **9.** 6 ч. ▲ Пусть s — расстояние между пунктами A и B, u — собственная скорость катера, v — скорость течения. Имеем следующую систему уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v} = 24, \\ \dfrac{s}{u+v} + \dfrac{s}{u-v} \geqslant 10, \\ \dfrac{s}{1,4u+v} + \dfrac{s}{1,4u-v} \leqslant 7. \end{cases}$$

Нужно определить $\dfrac{s}{u-v}$. Полагая $\dfrac{u}{v} = x$ (по смыслу задачи $x > 1$), преобразуем неравенства:

$$\frac{s}{v}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) \geqslant 10,\ \frac{s}{v}\left[\frac{1}{1{,}4x+1} + \frac{1}{1{,}4x-1}\right] \leqslant 7.$$

Так как $\dfrac{s}{v} = 24$ и $x > 1$, то в результате получим систему неравенств, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 5x^2 - 24x - 5 \leqslant 0, \\ 1{,}96x^2 - 9{,}6x - 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система совместна при $x = 5$. Далее находим

$$\frac{s}{u-v} = \frac{s}{v} \cdot \frac{1}{x-1} = 24 \cdot \frac{1}{5-1} = 6.$$

10. 11 двоек, 7 троек, 10 четверок, 2 пятерки. ▲ Пусть x — число двоек, y — число троек, z — число четверок, t — число пятерок. Составим систему

$$x + y + z + t = 30,\ 2x + 3y + 7z + 3t = 93,\ y > t = 2m,$$
$$y < z = 10k,\ m \in \boldsymbol{Z}_0,\ k \in \boldsymbol{Z}_0.$$

Из первого уравнения имеем $x = 30 - (y + z + 1)$. Подставив это выражение во второе уравнение, получаем $y + 3t = 33 - 2z$. Отсюда находим z; из условия задачи следует, что z может принимать лишь значения 0, 10, 20, 30.

Значение $z = 0$ не подходит, поскольку неравенство $y < 0$ не имеет смысла; $z = 20$ и $z = 30$ также не подходят, так как не выполняется неравенство $33 - 2z \geqslant 0$. Значит, $z = 10$. Далее имеем $y = 13 - 3t > t$, откуда $0 \leqslant t < 3{,}25$. При $t = 0$ получаем $y = 13 > z$ (не удовлетворяет условию задачи). Следовательно, $t = 2$ и $y = 13 - 6 = 7$, затем находим $x = 30 - (7 + 10 + 2) = 11$.

11. 11 лип, 5 берез. ▲ Пусть x — число берез, y — число лип. Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x + y > 14, \\ 2y < x + 18, \\ 2x < y. \end{cases}$$

Складывая второе и третье неравенства, получаем $x + y < 18$. Таким образом, возможны три случая: $x + y = 15$, $x + y = 16$ и $x + y = 17$. Рассмотрим их.

1) Если $y = 15 - x$, то

$$\begin{cases} 2\,(15 - x) < x + 18 \\ 2x < 15 - x \end{cases} \Rightarrow 4 < x < 5.$$

Так как x — натуральное число, то этот случай не имеет места.

2) Если $y = 16 - x$, то

$$\begin{cases} 2(16 - x) < x + 18, \\ 2x < 16 - x \end{cases} \Rightarrow 4\frac{2}{3} < x < 5\frac{1}{3};$$

$x = 5$ удовлетворяет этой системе: $y = 16 - 5 = 11$.

3) Если $y = 17 - x$, то

$$\begin{cases} 2(17 - x) < x + 18, \\ 2x < 17 - x \end{cases} \Rightarrow 5\frac{1}{3} < x < 5\frac{2}{3}.$$

Здесь, как и в первом случае, натуральных x, удовлетворяющих системе неравенств, нет. Итак, возможен лишь один случай, когда $x = 5$, $y = 11$.

12. $5\frac{4}{7}$ мин. **13.** $\frac{25}{7}$ м^3/ч. ▲ Пусть W — объем бассейна ($W > 0$); тогда

$$t(v) = \frac{0,3W}{30 + (30 - 3v)} + \frac{0,7W}{30 + (30 - 3v) + (30 + 10v)} =$$

$$= \frac{W}{10}\left(\frac{1}{20 - v} + \frac{7}{90 + 7v}\right).$$

Найдем производную функции $t(v)$:

$t'(v) = \frac{W}{10}\left(\frac{1}{(20 - v)^2} - \frac{49}{(90 + 7v)^2}\right)$, $t'(v) = 0$ при $v = \frac{25}{7}$; $\frac{25}{7} \in (0; 10)$;

в точке $v = \frac{25}{7}$ производная меняет знак (при $x < \frac{25}{7}$ значения производной отрицательны, при $x > \frac{25}{7}$ — положительны), поэтому в точке $v = \frac{25}{7}$ функция $t(v)$ имеет минимум.

14. 6 км/ч. ● Исследуйте на экстремум функцию $t(v) = \frac{6}{v} + \frac{2}{3} + 0{,}25v\left(\frac{2}{3} + \frac{6}{v}\right)$, $v > 0$, где $t(v)$ — полное время движения пешехода. **15.** 0 л, если $p \in [20;\ 100]$; от 0 до 3 л (включительно), если $p = 20$; 3 л, если p (0; 20). **16.** 62,5% и 55% . ▲ Пусть взяли x кг первого сплава, y кг второго и z кг третьего. Так как новый сплав содержит 15% висмута, то имеем уравнение $3x + y - 3z = 0$, причем $z \neq 0$ и $z \geqslant x$. Процентное содержание свинца в новом сплаве равно $p(x) = 5\frac{11x + 10y + 14z}{x + y + z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{44z - 19x}{2z - x} =$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{44 - \frac{x}{z}}{2 - \frac{x}{z}},\ 0 \leqslant \frac{x}{z} \leqslant 1.$$

Функция $p\left(\frac{x}{z}\right)$ принимает наибольшее и наименьшее значения на концах отрезка: при $\frac{x}{z} = 0$ и при $\frac{x}{z} = 1$. **17.** 0 м/с^2; $11\frac{1}{3}$ м. ● Для нахождения пути воспользуйтесь формулой $s = \int\limits_0^4 |\,v(t)\,|\,dt$.

18. 23 ученика. **19.** 7 автомашин. **20.** 7 участников.

Глава V

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. а) $2x + C$; б) $x - 1{,}5x^2 + C$; в) $(2x - 1)^2 + C$. **2.** а) $C - \frac{x^3}{3}$; б) $\frac{x^3}{3} - 2x^2 - \sqrt{3}\,x + C$; в) $2(3x + 2)^3 + C$. **3.** а) $0{,}5x^2 - 0{,}75x^4 + C$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{x^6}{6} + C$; в) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + C$; г) $\frac{(3x-4)^{101}}{303} + C$; д) $C - \frac{(1-5x)^8}{40}$. **4.** а) $C - \frac{1}{x}$; б) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} + C$; в) $2x^2 - \frac{1}{2(2x+1)} + C$; г) $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + C$. **5.** а) $\frac{\sqrt{x}}{2} + C$; б) $\frac{3}{4}\ x\sqrt[3]{x} - x + C$; в) $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C$; г) $x\left(\frac{7}{8}\sqrt[7]{x} - \frac{5}{6}\sqrt[5]{x} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x}\right) + C$; д) $\frac{2}{3}(x + 2)\sqrt{x+2} + C$; е) $\frac{(4x-5)\sqrt{5-4x}}{6} + C$. **6.** а) $2\ln|x| + C$; б) $C - \frac{1}{2}\ln|x|$; в) $-\ln|1 - x| + C$; г) $\frac{3}{4}\ln|4x - 1| + C$. **7.** а) $\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$; б) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$. ● Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$; в) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right| + C$; г) $\ln|x^2 + 3x| + C$. ● Воспользуйтесь тем, что $\frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{x+x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x}$. **8.** а) $\operatorname{arctg} x + C$; б) $\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$. ● Используйте тождество $\frac{2}{x^2+4} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$; в) $3\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C$. ● Используйте тождество $\frac{4x^2+1}{x^2(1+x^2)} = \frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}$; г) $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$. ● Используйте тождество $\frac{(x+1)^2}{x(1+x^2)} = \frac{(x^2+1)+2x}{(x^2+1)x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2}$.
9. а) $4\arcsin x + C$; б) $\frac{1}{2}\arccos 2x + C$;

в) $\arcsin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$. ● Воспользуйтесь тождеством $\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$.

10. а) $\frac{2^x}{\ln 2} + C$; б) $\frac{-3^{-x}}{\ln 3} + C$; в) $\frac{e^{4x}+x^2}{2} + C$; г) $C - e^{-x}$; д) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$; е) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$. **11.** а) $C - 2\cos x$; б) $C - 6\cos\frac{x}{2}$; в) $C - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; г) $\frac{1}{2}\cos\left(10x + \frac{\pi}{8}\right) + C$. **12.** а) $4\sin x + C$; б) $C - 10\sin\frac{x}{5}$; в) $2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + C$; г) $\frac{2}{7}\sin(7x-1) + C$. **13.** а) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$. ● Воспользуйтесь тождеством $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; б) $-x - \frac{\sin 4x}{4} + C$; в) $\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x + C$. ● Воспользйтесь тождеством $2\cos x \times \times \cos 5x = \cos 4x + \cos 6x$; г) $\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{11}\sin 11x + C$; д) $-\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{11}\cos 11x + C$; е) $\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{12}\cos 12x + C$. **14.** а) $\frac{3}{4}\operatorname{tg} 4x + C$; б) $-4\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$; в) $\operatorname{tg} x - x + C$. ● Используйте тождество $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; г) $C - \operatorname{ctg} x - x$. **15.** а) $x^3 - 2x$. ▲ Имеем $F(x) = \int(3x^2-2)dx = x^3 - 2x + C$; $F(2) = 2^3 - 2\cdot 2 + C = 4$, откуда $C = 0$; б) $x + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$; в) $3\sin x + 2\cos x - 2$; г) $2e^{\frac{x}{2}} + 1$.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

1. а) $\arcsin^2 x$; б) $\sin^8 x + \sqrt{1+x^4}$. **2.** а) $\{-4; 1\}$. ● Воспользуйтесь тем, что $f'(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) - 24$; б) $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}_0\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8};\ \pi n \pm \frac{\pi}{3} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; г) $\left\{\frac{\pi n}{2} \pm\right.$

$\pm \frac{1}{4}\arccos\frac{2a-1}{3} \,\Big|\, n \in \boldsymbol{Z}\Big\}$ при $a \in [-1;\ 2]$; при $a \notin [1;\ 2]$ функция критических точек не имеет; д) $\left\{\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6} \,\Big|\, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **3.** а) $-33\frac{3}{4}$; б) 0; в) 1; г) π; д) 2π. **4.** $\left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$. **5.** (0; 4). **6.** $\left\{\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}\right\}$.

7. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

1. а) $\frac{1}{2}$; б) 4; в) $\frac{9}{8}$; ● Проинтегрируйте по переменной y; г) $\frac{25}{2}$. ● Для нахождения пределов интегрирования решите системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = -11, \\ 4x + 3y = 27; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -11, \\ x + 7y = 13; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 7y = 13, \\ 4x + 3y = 27. \end{cases}$$

2. а) $\frac{64}{3}$; б) 18; в) 90; г) 8; д) $\frac{32}{3}$; е) 4,5. **3.** а) 4,5; б) 4; в) $57\frac{1}{6}$. ● Вычислите площадь фигуры в новой системе координат, получаемой из старой с помощью переноса $\bar{r}$ {0; –4}; г) $\frac{1}{6}$; д) $\frac{37}{48}$. **4.** $\frac{19}{24}$.

5. $\frac{9}{8}$. **6.** 0,5. **7.** $\frac{125}{2}$. **8.** $\left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$. **9.** $\{-1;\ \sqrt[3]{8-\sqrt{17}}\}$. ● Рассмотрите случаи $c < 1$ и $c > 1$. **10.** а) $23 - 5\ln\frac{28}{5}$; б) $\frac{3}{4} - \ln 2$; в) $12 - 5\ln 5$; г) $\frac{2\sqrt{5}-3}{2} + \ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **11.** а) 4; б) 3; в) $\frac{23275}{4}$. **12.** $4\ln\frac{3}{2} - 1{,}5$.

13. $\left\{\frac{1}{4};\ \frac{49}{4}\right\}$. ● Рассмотрите случаи $c < 4$ и $c > 4$. **14.** а) $\frac{7}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{8}{9}$; г) $\frac{548}{3}$. **15.** а) 9; б) $2\frac{2}{3}$; в) $35\frac{5}{24}$. **16.** а) $\frac{1}{3} + \ln 2$; б) $\frac{13}{3} - 4\ln 2$;

в) 16,5 – 8 ln 2; г) 48 ln 2 – 11,25; д) $\frac{20}{3}$; е) ln 2. **17.** а) 4 – ln 3; б) $\frac{1}{6}\ln\frac{3e}{8}$. **18.** $\left\{\frac{12-2\sqrt{21}}{5};\, 8\right\}$. ▲ Кривые $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{2x-1}$ пересекаются в точке $O_1(1;\ 1)$: это следует из решения уравнения $\frac{1}{x} = \frac{1}{2x-1}$. Рассмотрим возможные случаи расположения прямой $x = a$: $\frac{1}{2} < a < 1$, $1 < a < 2$ и $a > 2$.

1) Если $\frac{1}{2} < a < 1$, то площадь данной фигуры равна сумме площадей фигур EO_1F и AO_1B (рис. 16):

$$\ln\frac{4}{\sqrt{5}} = \int_a^1\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x}\right)dx + \int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1}\right)dx.$$

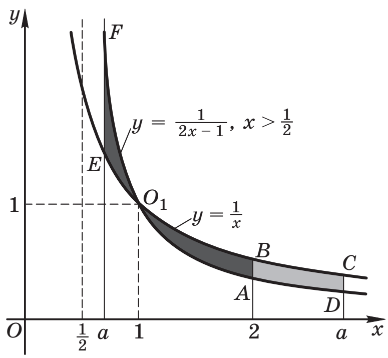


Рис. 16

Интегрируя правую часть, получаем

$$\ln\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{x^2}\right|\Big|_a^1 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{2x-1}\right|\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{2a-1}{a^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3},$$

или

$$\ln\frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2}{2a-1}. \qquad (1)$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой площадь криволинейного треугольника EO_1F $\left(\ln \frac{2\sqrt{3}}{5} > 0\right)$. Далее имеем

$\frac{a^2}{2a-1} = \frac{12}{5}$,

$$5a^2 - 24a + 12 = 0, \qquad (2)$$

откуда $a_1 = \frac{12 - 2\sqrt{21}}{5}$, $a_2 = \frac{12 + 2\sqrt{21}}{5}$. Устанавливаем, что условию $\frac{1}{2} < a < 1$ удовлетворяет только корень a_1.

2) Если $1 < a < 2$, то прямой не существует (в случае $\frac{1}{2} < a < 1$ установлено, что площадь данной фигуры больше площади криволинейного треугольника AO_1B).

3) Если $a > 2$, то площадь данной фигуры равна площади фигуры $ABCD$ (см. рис. 16):

$$\ln \frac{4}{\sqrt{5}} = \int_2^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1}\right) dx. \qquad (3)$$

После интегрирования правой части уравнения (3) и его преобразований получаем $15a^2 - 128a + 64 = 0$; $a_3 = 8$; $a_4 = \frac{8}{15}$. Значение a_4 не удовлетворяет неравенству $a > 2$, поэтому оно является посторонним. Таким образом, условию задачи удовлетворяют значения $a \in \left\{\frac{12 - 2\sqrt{21}}{5}; 8\right\}$.

19. а) $\log_3 e$; б) $\log_4 e$; в) $\frac{30 - 18\ln 2}{\ln 2}$; г) $8\left(1 - \frac{1}{81}\ln 3\right)$.

20. а) $2e^3 + 1$; б) $\frac{e^3 - 4}{e^4}$; в) $\frac{33}{2} + e^{-5}$; г) $e^2 - 2$. **21.** $\frac{360}{\ln 3} - 162$.

● Для нахождения значений k и m решите систему уравнений

$$k + m = 34,\ 3^{-1}k + m = 14.$$

22. $4\log_5 \frac{e^4}{27}$. ● Для нахождения коэффициента b решите уравнение $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 40 \ln 5) = 5b \ln 5$.

23. $3{,}5 - 12\ln \frac{4}{3}$.

24. а) 4. ● Учтите, что $S = \int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int\limits_0^{\pi} \sin x\ dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx$; б) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$; в) $2\sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$. **25.** а) $\pi\frac{\sqrt{3}}{4} + \sin 1 - \frac{1}{2}$; б) $1 + \frac{\pi}{3} - \cos 3 - \sqrt{3}$; в) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$; г) $2 + \cos 2$.

● **26.** $\left\{-\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{9}\right\}$. ● Рассмотрите случаи $-\frac{\pi}{6} \leqslant k < \frac{\pi}{18}$ и $\frac{\pi}{18} < k \leqslant \frac{\pi}{6}$.

27. $\left\{-\frac{\pi}{30}; \frac{\pi}{6}\right\}$.

28. а) π. ▲ Так как подынтегральная функция $y = \sqrt{4 - x^2}$ неотрицательна на отрезке [0; 2], то значение искомого интеграла численно равно площади фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, которая представляет собой четверть круга радиуса 2 (рис. 17). Таким образом, значение интеграла равно $\pi \cdot \frac{2^2}{4} = \pi$.

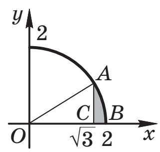


Рис. 17

б) $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$. ● Воспользуйтесь тем, что $I = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOC}$ (см. рис. 17).

29. а) $2 \ln 2 - 1$. ▲ Имеем $I = S_{BCD} = S_{OAB} - S_{ABDO}$ (рис. 18).

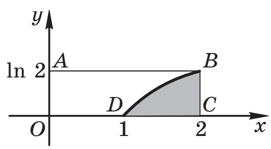


Рис. 18

Найдем площади фигур $OABC$ и $ABDO$. Так как $OABC$ — прямоугольник, то $S_{OABC} = 2BC$, где $BC = \ln 2$;, поэтому $S_{OABC} = 2 \ln 2$.

Площадь криволинейной трапеции $ABDO$ найдем, проинтегрировав функцию $x = e^y$ в пределах от 0 до ln 2 (ординаты точек O и A соответственно):

$$S_{ABDO} = \int\limits_0^{\ln 2} e^y dy = e^{\ln 2} - 1 = 1.$$

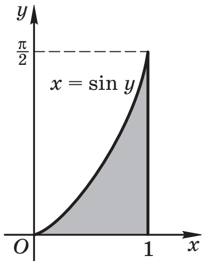


Рис. 19

Окончательно получим $I = 2\ln 2 - 1$.

б) $\frac{\pi}{2} - 1$. ▲ Значение интеграла равно площади S затемненной фигуры (рис. 19). Найдем эту площадь:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy = \frac{\pi}{2} - 1.$$

30. а) $F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$; б) $F(x) = -\cos 2x + x^3 + 4$.

31. а) 62,5. ● Искомая площадь выражается так: $S = 3\int_{-2}^{3}(6 + x - x^2)\, dx$. б) $\frac{9}{2}$. ● Искомая площадь выражается так: $S = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx$. в) $\frac{7}{6}$. ● Искомая площадь выражается так: $S = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx$. **32.** а) $(4\ln 2)^{-1}(4 - 3\sqrt[3]{2})$. ▲ Имеем $S = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} (4^x - \frac{1}{2} 2^{-x})\, dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^{-x}}{2\ln 2}\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0} = \frac{1}{2\ln 2}(4^x + 2^{-x})\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0} =$

$= \frac{1}{2\ln 2}\left(2 - 4^{-\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2\ln 2}\left(2 - 2^{\frac{1}{3}}(1 + 2^{-1})\right) = \frac{1}{2\ln 2}\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right) =$

$= \frac{1}{4\ln 2}(4 - 3\sqrt[3]{2})$. б) $e - \frac{1}{2}$. ● Воспользуйтесь тем, что $S = \int_0^1 (e^x - x + 1)\, dx$; в) $\frac{4}{3}$ ● Воспользуйтесь тем, что $S = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx$.

Глава VI

Числовые последовательности. Прогрессии. Предел функции. Непрерывность

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. а) ▲ Выберем произвольное положительное число ε и покажем, что для него можно найти такое натуральное число N, что при любом номере $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{n} - 0 < \varepsilon. \tag{1}$$

После преобразований получим неравенство $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Если номер n больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}$, то неравенство (1) будет выполняться, т. е. N можно взять равным $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, существование числа N такого, что при любых $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$ неравенство (1) выполняется, показано и тем самым доказательство завершено. ***Замечание.*** В качестве N можно взять любое натуральное число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$;

б) ● Покажите, что N можно взять равным $\left[\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$, где $\varepsilon > 0$;

в) ● Воспользуйтесь тем, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, $0 < q < 1$.

2. ▲ *I способ.* Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если найдутся такие два числа m и M, что при любом $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $m \leqslant x_n \leqslant M$. Докажем существование чисел m и M для данной последовательности. Все члены последовательности с общим членом $\frac{1+(-1)^n}{n^2}$ неотрицательны;

если $n = 2k - 1$, то $x_{2k-1} = 0$; если $n = 2k$, то $x_{2k} = \frac{2}{(2k)^2} = \frac{1}{2k^2}$, $k \in \boldsymbol{N}$, поэтому в качестве m можно взять любое отрицательное число или нуль (например, $m = -2$). В качестве M можно взять, например, единицу. Действительно, $x_{2k-1} = 0 < 1$ и $x_{2k} = \frac{1}{2k^2} < 1$ при любом $k \in \boldsymbol{N}$. Следовательно, $-2 \leqslant x_n \leqslant 1$ при любом $n \in \boldsymbol{N}$, а это означает ограниченность заданной последовательности.

II способ. Так как всякая сходящаяся последовательность ограничена (необходимое условие сходимости последовательности), то установив, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = 0$, заключаем, что данная последовательность ограничена.

3. Ограничены последовательности а), б), в), д), з). **4.** Ограничены последовательности а), г).

5. Нет, например, последовательность $\{x_n\}$, $x_n = (-1)^n$ ограничена, но она не имеет предела.

6. Последовательность (x_n) называется неограниченной, если для любого числа $L > 0$ существует хотя бы один номер n такой, что $|x_n| > L$.

7. а) ● Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+2}{n-1}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 - 3n^2}{n^2 + 1}$; б) ● Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n^2 - 1}$. **8.** Вообще говоря, нет. Например, $x_n = (-1)^n$, $y = (-1)^{n+1}$. **9.** а) ● Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - n + n^2}{n^2}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 5n^3}{n^3 + 3}$;

б) ● Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \left(15 + \frac{1}{n^2}\right)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-7}{n+6}$.

10. ▲ Предел последовательности $\{z_n\}$, $z_n = cx_n$, где c — постоянная, существует: $\lim\limits_{n \to \infty} cx_n = c \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Полагая $c = -1$, получаем $\lim\limits_{n \to \infty} (-x_n) = -\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -a$.

11. ▲ Так как $\lim y_n = b$, то $\lim (-y_n) = -b$ (см. решение предыдущей задачи). Применяя теорему о пределе суммы двух сходящихся последовательностей, получаем

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + (-y_n)) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} x_n + \lim_{n \to \infty} (-y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} y_n = a - b.$$

12. а) Расходится;

б) может как сходиться, так и расходиться. Например,

1) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$; $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = 0$, т. е. последовательность $\{a_n b_n\}$ сходится;

2) $a_n = \frac{n+1}{n}$, $b_n = (-1)^n$ — в этом случае предел последовательности $\{a_n b_n\}$ не существует.

13. а) Нельзя; б) нельзя. Например, $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, $a_n + b_n = 0$, $\lim (a_n + b_n) = 0$, $a_n b_n = (-1)^{2n+1} = -1$ и $\lim (a_n b_n) = -1$.
14. Нет. Например, $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$, $b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$; обе последовательности расходятся. **15.** Монотонны последовательности а), в), г). **16.** Монотонны последовательности б), г). д). **17.** ▲ Все члены последовательности $\{x_n\}$, $x_n = \frac{5n}{n+2}$, положительны, следовательно, $x_n > 0$, а так как $\frac{n}{n+2} < 1$, то $\frac{5n}{n+2} < 5 \cdot 1$. Таким образом, для любого $n \in N$ выполняются неравенства $0 < x_n < 5$, т. е. данная последовательность ограничена. Для доказательства второго утверждения рассмотрим разность

$$x_{n+1} - x_n = \frac{5(n+1)}{(n+1)+2} - \frac{5n}{n+2} = \frac{5 \cdot 2}{(n+3)(n+2)},$$

которая положительна при любом $n \in N$, значит, данная последовательность возрастает.

18. ● Покажите, что $1 < x_n < 1{,}5$ и что $x_{n+1} - x_n < 0$.

19. Нет; например, если $x_n = \frac{1}{n}$, $y = (-1)^n n$, то последовательность $x_n y_n = (-1)^n$ не имеет предела.

20. 2. ▲ Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $x_n = \frac{2n+1}{n+2}$ и $y_n = \frac{n-3}{n+4}$, и найдем их пределы. Для последовательности $\{x_n\}$ имеем $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = $

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$ $\left(\text{так как } \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ и } \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0\right)$. Аналогично находим предел последовательности $\{y_n\}$: $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 1$. Далее, применяя теорему о пределе произведения двух сходящихся последовательностей, получаем ответ.

21. 0. ● Преобразуйте выражение $\frac{5n^3-4}{n^4+6}$ к виду $\frac{1}{n} \cdot \frac{5-\frac{4}{n^3}}{1+\frac{6}{n^3}}$ и примените теорему о пределе произведения бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность.

22. $-\frac{5}{3}$. **23.** $\frac{1}{5}$. **24.** $\frac{1}{27}$. **25.** $-\frac{3}{4}$.

26. 0. ● Преобразуйте выражение $\frac{n\sin n}{n^2+1}$ к виду $\frac{1}{n}\frac{\sin n}{1+\frac{1}{n^2}}$ и покажите, что последовательность $\frac{\sin n}{1+\frac{1}{n^2}}$ ограничена. **27.** 4. **28.** 0.

● Воспользуйтесь тем, что $\frac{n!}{(n+1)!-n!} = \frac{n!}{n!(n+1)-n!} = $

$= \frac{n!}{n!(n+1-1)} = \frac{1}{n}$.

29. 0. **30.** 1. **31.** $\frac{3}{4}$. **32.** $\frac{3}{2}$. ● Воспользуйтесь тем, что $1+2+3+\ldots+n = n\frac{n+1}{2}$. **33.** $\frac{4}{3}$. ● Воспользуйтесь тем, что $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n(n+1)\,\frac{2n+1}{6}$.

34. а) 1. ● Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; б) $\frac{1}{2}$;

в) $\frac{1}{2}$. ● Используйте результаты задач а) и б) и примените теорему о пределе разности двух сходящихся последовательностей.

35. 1, если $b > 1$; 0, если $|b| = 1$; -1, если $0 < |b| < 1$.

§ 2. ПРОГРЕССИИ

1. Нет. ● Покажите, что уравнение $1 + 4(n - 1) = 10\,091$ не имеет решений в целых числах.

2. 13. **3.** 99 270. **4.** 16; 12; 8; ...; −16; −20. ▲ Пусть a_1 — первый член прогрессии, d — ее разность. Составим систему

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} = 0, \\ a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = -36, \\ a_{10} - a_6 = -16. \end{cases}$$

Из третьего уравнения имеем $(a_1 + 9d) - (a_1 + 5d) = -16$, т. е. $d = -4$. Вычтем из первого уравнения системы второе; тогда получим $a_1 - a_n = 36$, или $-d(n - 1) = 36$, $-(-4)(n - 1) = 36$ и $n = 10$. Для нахождения a_1 преобразуем левую часть первого уравнения:

$$\frac{a_1 + a_{n-1}}{2}(n-1) = \frac{a_1 + a_1 - 4(9-1)}{2}9 = 0;\ a_1 = 16.$$

5. 11; 13; 15 ; ...; 29, 31. **6.** 1; 3; 5; ...; 17, 19. **7.** 7. **8.** 8; 12; 16; ... . ▲ Используя условие, запишем систему

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 12, \\ 200 < \dfrac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 < 220. \end{cases}$$

Из уравнения системы выразим a_1 через d и подставим в неравенство: $200 < \frac{2(12-d)+8d}{2} \cdot 9 < 220$. После преобразований получаем $3\frac{11}{27} < d < 4\frac{4}{27}$. Так как все члены прогрессии — натуральные числа, то разность d прогрессии должна быть целым числом. Последнему неравенству удовлетворяет $d = 4$; других целых чисел в интервале $\left(3\frac{11}{27};\ 4\frac{4}{27}\right)$ нет. Далее находим первый член прогрессии: $a_1 = 12 - 4 = 8$.

9. -4. **10.** 5; 9; 13; ... . **11.** $a_1 = 4$; $d = 5$. **12.** $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$. ▲ Пусть x, y, z — искомые числа; имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0{,}6(1) = \dfrac{11}{18}; \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 18, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y} \end{cases}$$

(здесь $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{1}{z}$ — последовательные члены прогрессии.). Вычитая из второго уравнения системы третье, находим $y = \frac{1}{6}$. Подставив это значение y в первое и второе уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases} x + z = \dfrac{4}{9}, \\ \dfrac{x+z}{xz} = 12, \end{cases}$$

решения которой найдем, подставляя $z = \frac{4}{9} - x$ во второе ее уравнение.

13. $-\frac{3a}{\sqrt{28}}$; $-\frac{2a}{\sqrt{28}}$; $-\frac{a}{\sqrt{28}}$ ... или $\frac{3a}{\sqrt{28}}$, $\frac{2a}{\sqrt{28}}$, $\frac{a}{\sqrt{28}}$, ...

14. $\left\{\pm\frac{\sqrt{25b-9}}{4}\right\}$ при $b \in (1; +\infty)$. ▲ Согласно условию, имеем систему уравнений

$$a_2a_{12} = 1,\ a_4a_{10} = b.$$

Так как $a_7 = a_1 + 6d$, то $a_1 = a_7 - 6d$ и полученную систему можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} (a_7 - 5d)(a_7 + 5d) = 1, \\ (a_7 - 3d)(a_7 + 3d) = b \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_7^2 \cdot 25d^2 = 1, \\ a_7^2 \cdot 9d^2 = b, \end{cases}$$

откуда $d^2 = \frac{b-1}{16}$ и $a_7^2 = \frac{25b-9}{16}$; $a_7 = \pm\frac{\sqrt{25b-9}}{4}$. Поскольку должны выполняться неравенства $d^2 \geqslant 0$, $a_7^2 \geqslant 0$, одновременно должны выполняться неравенства

$$b - 1 \geqslant 0 \text{ (1) и } 25b - 9 \geqslant 0 \text{ (2)}.$$

Решив систему линейных неравенств (1) и (2), находим $b \in (1; +\infty)$. При других значениях параметра b система уравнений действительных решений не имеет, т. е. не существует арифметической прогрессии, членами которой являются действительные числа.

15. $\frac{116k-39}{90}$ при $k \in \left[-6; \frac{3}{2}\right]$. **16.** $\frac{34-29b}{10}$ при $b \in \left[1; \frac{9}{4}\right]$.

17. $-(p+q)$. **18.** 6. ▲ Согласно условию, $\frac{a_1+a_n}{2}n = \frac{a_{n+1}+a_{2n}}{4}n$, откуда $a_1 + a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{2n})$.

Теперь находим искомое отношение:

$$\frac{(a_1+a_{3n})3n}{2} : \frac{a_1+a_n}{2}n = \frac{3(a_1+a_{3n})2}{a_{n+1}+a_{2n}} = 6\,\frac{2a_1+d(3n-1)}{2a_1+d(n+2n-1)} = 6.$$

19. -1; 0; 1; 2. ▲ Пусть $a-d$, a, $a+d$ и $a+2d$ — искомые числа. Будем предполагать, что прогрессия возрастающая. Тогда получим уравнение, которое и решаем относительно a:

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = (a+2d),\ 3a_2 - a + 2d_2 - 2d = 0;$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{-24d^2+24d+1}}{6}. \tag{1}$$

Действительные решения будут существовать, если

$$-24d^2 + 24d + 1 \geqslant 0, \text{ или } \frac{12-\sqrt{168}}{24} \leqslant d \leqslant \frac{12+\sqrt{168}}{24}.$$

Этот промежуток содержит лишь два целых числа: 0 и 1. Нуль отбрасываем, так как по условию все искомые числа различны. При $d = 1$ из равенства (1) находим $a = 0$, $a - d = -1$; $a + d = 1$, $a + 2d = 2$.

20. 13. **21.** $\frac{np(1+np)}{2}$. **22.** 2,4. **23.** $a_1 = 8$, $q = 2$. **24.** 39 или −10,5.

25. ±4. **26.** 2; 6; 18; ... или 18; 6; 2; ... . **27.** $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$. **28.** $\frac{12}{q^{100}}$. **29.** $\frac{S_2}{S_1}$.

▲ По условию имеем систему

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + \ldots + a_{999} = S_1, \\ a_2 + a_{4} + \ldots a_{1000} = S_2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на знаменатель прогрессии q:

$$a_1q + a_3q + \ldots + a_{999}q = a_2 + a_4 + \ldots + a_{1000} = S_1q.$$

Решив далее уравнение $S_2 = S_1q$, получим ответ. **30.** $\pm\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$.

31. 6. ▲ Пусть a_1 — первый член прогрессии, q — ее знаменатель, n — число членов. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} a_1 + a_1q^{n-1} = 66, \\ a_1^2 q^{n-1} = 128, \\ a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 126. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на a_1 и учитывая, что $a_1^2 q^{n-1} = 128$, получаем $a_1^2 - 66a_1 + 128 = 0$; $(a_1)_1 = 64$ и $(a_1)_2 = 2$. Далее из второго уравнения находим $(q^{n-1})_1 = \frac{1}{32}$ и $(q^{n-1})_2 = 32$.

Так как $q^n = (q^{n-1})q$, то, подставляя полученные значения a_1 и q^{n-1} в третье уравнение системы, находим знаменатель прогрессии: $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = 2$. Поскольку прогрессия возрастающая, значение q_1 является посторонним. Решив теперь уравнение $2^{n-1} = 32 = 2^5$, получим ответ.

32. 600 м/мин. ▲ Пусть v_1, v_2, v_3 (м/мин) — соответственно скорость первого, второго и третьего конькобежца. Из условия следует, что $v_3 < v_1 < v_2$, т. е. $v_1^2 = v_2v_3$. Далее, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} v_2t = v_1t + 400, \\ v_1t = v_3\left(t - \frac{2}{3}\right), \end{cases}$$

где t — время, в течение которого второй конькобежец обошел первого на круг. Исключая из этих уравнений t, получаем

$$\frac{v_2 - v_1 v_3}{v_1 - v_3} = \frac{v_1^2 - v_1 v_3}{v_1 - v_3} = v_1 = 600.$$

33. ● Воспользуйтесь тем, что $S_{2n} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ $\ldots + a_{2n} = a_{n+1}\frac{1-q^n}{1-q}$; $S_{3n} - S_{2n} = a_{2n+1}\frac{1-q^n}{1-q}$. **34.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. **35.** $\frac{1029}{38}$.

▲ Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — геометрическая прогрессия. Покажем, что последовательность $a_1^k,\ a_2^k,\ a_n^k,$ $\ldots \mid k \in \boldsymbol{N}$, также является геометрической прогрессией. Действительно, так как $a_{i+1} = a_i q \mid i \in \boldsymbol{N}$, то

$$a_{i+1}^k = a_i^k q^k \text{ и } \frac{a_{i+1}^k}{a_i^k} = q^k = \text{const},$$

причем эта постоянная не зависит от номера последовательности i. Таким образом, последовательности квадратов и кубов членов бесконечно убывающей прогрессии также являются бесконечно убывающими прогрессиями. Поэтому имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{7}{2}, \\[2ex] \dfrac{a_1^2}{1-q^2} = \dfrac{147}{16}, \end{cases}$$

решив которую найдем $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{7}$ (для этого достаточно возвести первое уравнение в квадрат и разделить его на второе уравнение). Подставляя теперь найденные значения a_1 и q в формулу $\frac{a_1^3}{1-q^3}$, получим ответ.

36. $\frac{100}{3}$. **37.** $\frac{3\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ или $-\frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$. **38.** 405; −270; 180; … .

39. $\frac{2}{3}$. **40.** 27 или 3. **41.** 2; 5; 8. **42.** 7; 14; 21. **43.** 2,5 или 22,5.

44. 931. **45.** 4; 20; 100 или $\frac{4}{9}$; $\frac{52}{9}$; $\frac{676}{9}$. **46.** 4; 12; 36 или $\frac{4}{9}$; $-\frac{20}{9}$;

$\frac{100}{9}$. **47.** $2 \pm \sqrt{3}$. **48.** 4; 20; 100 и 5; 20; 35 или 100; 20; 4 и 101; 20, −61. **49.** 5; 5; 5 или $\frac{10}{3}$; 5; $\frac{15}{2}$. **50.** 2. **51.** 3; 6; 9; 12. **52.** 1; 4; 16; 64. **53.** 2; 5; 8; ... и 3; 6; 12; ... или $\frac{25}{2}$; $\frac{79}{6}$; $\frac{83}{6}$; ... и $\frac{2}{3}$; $\frac{25}{3}$; $\frac{625}{6}$; ... . **54.** 6; 54. **55.** 1210. **56.** $b = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$. **57.** 2; 4; 8; 12 или $\frac{25}{2}$; $\frac{15}{2}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{3}{2}$. **58.** $b_1 = 405$, $q = -\frac{2}{3}$. **59.** $b_1 = 2$, $q = -\frac{1}{3}$. **60.** 3; 6; 12 или 12; 6; 3.

§ 3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. $\frac{2}{3}$. ▲ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$.

2. $\frac{3}{2}$. ● Разложите числитель и знаменатель дроби на множители. **3.** −7,2. **4.** 3. ● Упростите выражение в квадратных скобках. **5.** 1,2. ▲ Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, то полагая $x = \frac{1}{y}$, получим

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{3x}{5x-1} \cdot \frac{2x^2+1}{x^2+2x-1}\right) = \lim_{y \to 0}\left(\frac{\frac{3}{y}}{\frac{5}{y} - 1} \cdot \frac{\frac{2}{y^2}+1}{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} - 1}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0}\left(\frac{3}{5-y} \cdot \frac{2+y^2}{1+2y-y^2}\right) = \frac{3}{5} \cdot 2 = 1{,}2.$$

6. $\frac{2}{9}$. ● Сложите дроби и положите $x = \frac{1}{y}$. **7.** −3. ● Разложите числитель и знаменатель дроби на множители. **8.** $\frac{3}{4}$. **9.** 3. ▲ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x}\,(x + \sqrt{x} + 1) = 3$.

10. $\frac{1}{16}$. ▲ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - (3x-2)}{(x^2-4)(x + \sqrt{3x-2})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} =$

$= \dfrac{1}{(2+2)(2+2)} = \dfrac{1}{16}$. **11.** $\dfrac{1}{2}$. ▲ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2} = \dfrac{1}{2}$. **12.** $\dfrac{1}{4a\sqrt{a-b}}$.

● Умножьте числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}$.

13. $\dfrac{3}{2}$. ▲ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{3}{2}$.

14. 1,2. ▲ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \times$

$\times \dfrac{(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{(1-x)^4}+(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}+(1-x)^2)}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^4}+(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}+(1-x)^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^4}+(1-x)\sqrt[3]{(1+x)^2}+(1-x)^2)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})((1+x)^2-(1-x)^3)} =$

$= \dfrac{2(1+1)(1+1+1)}{(1+1)(2+3)} = \dfrac{6}{5}$.

15. a^2. ▲ Упростим выражение в круглых скобках. Полагая $\sqrt[4]{a} = b$, $\sqrt[4]{x} = y$, получаем $\left(\dfrac{b^2+y^2}{b-y}\right)^{-1} - \dfrac{2by}{y^3-by^2+b^2y-b^3} =$

$= \dfrac{b-y}{b^2+y^2} - \dfrac{2by}{(y-b)(b^2+y^2)} = \dfrac{1}{b-y}$. Так как $\sqrt{2}^{\log_4 a} = \sqrt[4]{a} = b$, то выражение в фигурных скобках примет вид $b-y-b=-y=-\sqrt[4]{x}$.

Далее находим предел: $\lim\limits_{x\to a} (-\sqrt[4]{x})^8 = \lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

16. 8. ▲ Положим $2^{\frac{x}{2}} = y$, тогда получим $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{2^x+2^{3-x}-6}{2^{-\frac{x}{2}}-2^{1-x}} =$

$= \lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^2+\dfrac{8}{y^2}-6}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{y^2}} = \lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^4-6y^2+8}{y-2} = \lim\limits_{y\to 2} \dfrac{(y-2)(y+2)(y^2-2)}{y-2} =$

$= \lim\limits_{y\to 2} (y+2)(y^2-2) = 4\cdot 2 = 8$.

17. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. ▲ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\cos 0}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

18. -24. ▲ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg} x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos^2 x\cos^2\frac{\pi}{3}}=4\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-\operatorname{tg} x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2 x}=4\cdot\sqrt{3}\times$$

$$\times 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-24.$$

19. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. ▲ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{4(0,25-\sin^2 x)}{4\cos x(\cos^2 x-0,75)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

20. 0,4. ▲ Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{5}\frac{\sin 2x}{2x}$. Полагая $2x=y$, находим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. Перемножив пределы $\frac{2}{5}$ и 1, получаем ответ.

21. $\frac{8}{3}$. ● Преобразуйте выражение $\sin 8x\ \operatorname{ctg} 3x$ к виду $\frac{8}{3}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cos 3x$, вычислите пределы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x$ и примените теорему о пределе произведения конечного числа функций, имеющих предел в данной точке.

22. $-\dfrac{1}{2}$. ● Запишите данную функцию так:

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2+2x}\ \operatorname{tg} x = \frac{x^2+3x-1}{(\cos x)(x+2)} \cdot \frac{\sin x}{x}.$$

23. 5. ● Положите $x - 1 = y$ и воспользуйтесь тем, что $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y} = 1$.

24. −1. **25.** $\dfrac{25}{6}$. **26.** 0 при $n = 1$; 4,9 при $n = 2$.

27. $-\sin a$. ● Преобразуйте выражение $\sin(a+2x) - \sin(a+x) - \sin(a+x) + \sin a$ в произведение.

28. $\dfrac{1}{4}$. ▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\operatorname{tg} x)-(1+\sin x)}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x(1-\cos^2 x)}{x^3(1+\cos x)(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$$

$$= \frac{1}{1(1+1)(1+1)} = \frac{1}{4}.$$

29. $\dfrac{1}{2}$. ▲ Представим данную функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1+1-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2} = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2} + \frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}.$$

Вычислим теперь пределы:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x(x+1)(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(x+1)(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2x)}{x(1+x)(1+\sqrt[4]{1-2x})(1+\sqrt{1-2x})} = \frac{2}{1(1+1)(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

Далее находим $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_1(x) + \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

30. а) $\{-3;\ 3\}$; б) $\{0\}$; в) $\{0\}$; г) $\{0\}$; д) $\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi \mid n\in \boldsymbol{Z}\right\}$; е) $\{n \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$. **31.** 1. **32.** 0. ▲ Положим $\pi - x = 2y$; тогда $x = \pi - 2y$, причем $y \to 0$ при $x \to \pi$. Имеем $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{2y} =$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{2y} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\sin\frac{y}{2} = 1\cdot 0 = 0.$$

33. $\frac{5}{2}$. **34.** $-\frac{5}{2}$. ▲ При решении нужно учесть, что если $x < 0$, то $-x = |x|$. Находим $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+2)(x+3)} + x\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{5x+6}{\sqrt{(x+2)(x+3)}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-5-\frac{6}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}+1} = -\frac{5}{2}.$$

35. $\frac{2}{3}$. ▲ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt[3]{1-x^3}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}-\sqrt[3]{(1+x^3)(1-x^3)}+\sqrt[3]{1-x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}+1\right)\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}-1\right)^2}} = \frac{2}{3}.$$

36. 1. **37.** 1. **38.** −1. ● Воспользуйтсь тем, что $x = -|x|$ при $x < 0$. **39.** 1. ▲ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}\left(\sqrt{1+x+x^2} + \right.$ $\left. + \sqrt{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 1$. **40.** −1. **41.** 2. **42.** 1.

▲ Имеем $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\ S_n$, где $S_n = 1 + \frac{2}{3} + \ldots$ $\ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; значит, $S_n\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$S_n = S_n\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ S_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}Sn = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1.$

43. $\frac{3}{5}$. ▲ Введем обозначение

$$S_n = 1 - \frac{2}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Тогда

$$S_n \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1};$$

$$S_n\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} S_n = 1 + (-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1};$$

$S_n = \frac{3}{5}\left(1 + (-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$. Следовательно,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{5}\left(1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{5}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

44. а) $A = 2$; б) $A = 0$; в) $A = 3$.

Глава VII

Элементы векторной алгебры

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. а) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ должны быть взаимно перпендикулярными; б) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ должен быть острым; в) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ должен быть тупым.

2. а) π; б) $\frac{1}{10}$. **3.** $x \in (-1;\ 5)$. ● Исходное неравенство равносильно неравенству $|x-2| \cdot |\bar{a}| < 3|\bar{a}|$, или $|x-2| < 3$.

4. $x \in (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ● Решите систему неравенств $|x| \geqslant 1$, $x + 3 \geqslant 0$. **5.** $x = \frac{10}{7}$, $y = \frac{4}{7}$. **6.** $\bar{0}$. ▲ По условию $\bar{a} + \bar{b} = \lambda\bar{c}$ и $\bar{b} + \bar{c} = \mu\bar{a}$, где λ, μ — некоторые числа, отличные от нуля. Исключая из этих уравнений $\bar{b}$, приходим к равенству $(\mu + 1)\bar{a} = (\lambda + 1)\bar{c}$, которое возможно лишь при $\mu = -1$ и $\lambda = -1$ (векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ не коллинеарны). Следовательно, $\bar{a} + \bar{b} = -\bar{c}$ и $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$.

7. $p = 1$, $q = 1$. ▲ Из коллинеарности векторов $p\bar{a} + q\bar{b} + \bar{c}$ и $\bar{a} + p\bar{b} + q\bar{c}$ следует, что $(p - \lambda)\bar{a} + (q - p\lambda)\bar{b} + (1 - \lambda q)\bar{c} = \bar{0}$. Последнее возможно лишь тогда, когда $p - \lambda = 0$, $q - p\lambda = 0$, $1 - \lambda q = 0$ $(\lambda \neq 0)$. Решив эту систему уравнений, получаем ответ.
8. Верно, если $a > b + c$. **9.** $\overline{AO} = \frac{1}{3}(\bar{a} + \bar{b})$.

10. $\frac{2}{3}(\bar{a} + \bar{b})$. ▲ Имеем $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$,

$$\overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} = \bar{a}, \tag{1}$$

$$\overline{AD} + \overline{DK} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \bar{b}. \tag{2}$$

Складывая уравнения (1) и (2), получаем $\frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{AD}) = \frac{3}{2}\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$, откуда $\overline{AC} = \frac{2}{3}(\bar{a} + \bar{b})$.

11. $a = b$. **12.** $\bar{e} = \dfrac{|\bar{b}|\bar{a} + |\bar{a}|\bar{b}}{||\bar{b}|\bar{a} + |\bar{a}|\bar{b}|}$. **13.** а) 13; б) $\sqrt{109}$. **14.** $\left\{\left(-\dfrac{5}{4}; \dfrac{8}{5}\right)\right\}$. **15.** $\bar{p} = \{-6; 8\}$. **16.** $\bar{p} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$. ▲ Так как векторы $\bar{p}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ компланарны, то $\bar{p} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$. Последнее уравнение можно переписать в виде $\bar{p} = \{3; 4\} = \lambda(3; -1) + \mu(1; -2)$. Отсюда получаем систему уравнений относительно λ и μ:

$$3 = 3\lambda + \mu,\ 4 = -\lambda - 2\mu,$$

решив которую находим $\lambda = 2$, $\mu = -3$; следовательно, $\bar{p} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.

17. $\{(2; 9); (7; 0)\}$. ● Рассмотрите отдельно случаи $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$.

18. $\{1,5; 1; -2\}$. **19.** ● Покажите, что $\overline{CD} = -2\overline{AB}$. **20.** $\sqrt{18}$. **21.** $\{4\sqrt{2}; -2; 8\}$, $\{-4\sqrt{2}; 2; -8\}$. **22.** $\{-24; 32; 30\}$. **23.** $\{-6; 8; 24\}$. **24.** $M(-1; 0; 0)$. ● Используйте равенство $|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$, где $\overline{MA} = \{1 - x; 2; 3\}$ и $\overline{MB} = \{-3 - x; 3; 2\}$.

25. $\dfrac{\sqrt{51}}{3}$. ● Воспользуйтесь разложением $\overline{AO} = \overline{AB} + \dfrac{1}{3}(\overline{BC} + \overline{BD})$. **26.** Да. **27.** $\bar{d} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + \bar{c}$. ● Представьте вектор $\bar{d}$ в виде $\bar{d} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c}$ и из системы уравнений

$$3\lambda - \mu + 2\nu = 11, \quad -2\lambda + \mu + \nu = -6, \quad \lambda - 2\mu - 3\nu = 5$$

найдите коэффициенты λ, μ, ν. **28.** $\dfrac{2}{5}\overline{AA_1} + \dfrac{2}{5}\overline{AB} + \dfrac{3}{5}\overline{AC}$. ● Воспользуйтесь разложением $\overline{AM} = \overline{AC} + \dfrac{2}{5}\overline{CB_1}$. **29.** $\dfrac{4}{13}\bar{i} + \dfrac{3}{13}\bar{j} + \dfrac{12}{13}\bar{k}$. ▲ Имеем $\overline{AC_1} = \overline{AD} + \overline{AB} + \overline{AA_1} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 12\bar{k}$; следовательно, $|\overline{AC_1}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13$ и $\bar{e} = \dfrac{\overline{AC_1}}{|\overline{AC_1}|} = \dfrac{4}{13}\bar{i} + \dfrac{3}{13}\bar{j} + \dfrac{12}{13}\bar{k}$.

30. 3 : 1. ● Докажите, что искомое отношение равно отношению длин векторов $\overline{EC}$ и $\overline{EM_2}$ (E — середина отрезка BD).

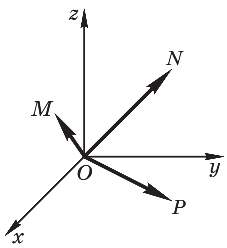


Рис. 20

31. 5. ▲ Введем прямоугольный базис $Oxyz$, совместив O с точкой приложения сил (рис. 20), причем $\overline{OM} \in xOz$, $\overline{ON} \in yOz$ и $\overline{OP} \in xOy$. Пусть $|\overline{OM}| = 1$, $|\overline{ON}| = 2$ и $|\overline{OP}| = 3$; тогда $\overline{OM} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$,

$\overline{ON} = \{0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$ и $\overline{OP} = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}};\ 0\right\}$.

Сумма этих векторов есть вектор равнодействующей данных сил: $\bar{p} = \left\{\frac{4}{\sqrt{2}};\ \frac{5}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$; $|\bar{p}| = \sqrt{\frac{16+25+9}{2}} = 5$.

32. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. **33.** $\alpha = -1$, $\beta = 9$. **34.** $\bar{a} = \left\{\frac{1}{3};\ \frac{8}{3};\ -\frac{4}{3}\right\}$. **35.** $AC = \sqrt{13}$, $BD = 5$. **36.** $\frac{\pi(2k+1)}{14}$, $\frac{\pi(2n+1)}{4}$, $\frac{\pi(2m+1)}{2}$, $|\ k, n, m \in \boldsymbol{Z}$.

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. $\frac{3\pi}{4}$. **2.** 4. **3.** $\frac{3}{\sqrt{21}}$. ▲ Имеем

$$(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = |\bar{a} + \bar{b}|\,|\bar{a} - \bar{b}|\cos\varphi;$$

отсюда

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2}{\sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2}\sqrt{(\bar{a}-\bar{b})^2}} =$$

$$= \frac{2^2 - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ}\sqrt{2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ}} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{21}}.$$

4. $-\frac{4}{5}$. ▲ Решив систему уравнений относительно $\bar{p}$ и $\bar{q}$, находим $\bar{p} = \frac{1}{3}(2\bar{a} - \bar{b}) = \left\{\frac{1}{3};\ 1\right\}$; $\bar{q} = \frac{1}{3}(2\bar{b} - \bar{a}) = \left\{\frac{1}{3};\ -1\right\}$; так как $\bar{p}\,\bar{q} = |\bar{p}|\,|\bar{q}|\cos\angle(\bar{p}, \bar{q})$, то

$$\cos\angle(\bar{p}, \bar{q}) = \left(\frac{1}{9} - 1\right) : \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = -\frac{4}{5}.$$

5. ● Докажите, что $\bar a\,\bar p=0$. **6.** -295. ▲ Возведя равенство $\bar a+\bar b+\bar c=\bar 0$ в квадрат, получаем $\bar a^2+\bar b^2+\bar c^2+2(\bar a\,\bar b+\bar b\,\bar c+$ $+\,\bar c\,\bar a)=0$. Отсюда имеем $\bar a\,\bar b+\bar b\,\bar c+\bar c\,\bar a=-\frac{1}{2}(\bar a^2+\bar b^2+\bar c^2)=$ $=-\frac{1}{2}(13^2+14^2+15^2)=-295$. **7.** $\arccos\frac{1}{3}$. ● Определите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. **8.** $\frac{\pi}{4}$. **9.** $\arccos\frac{5}{\sqrt{39}}$. ● Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

10. $\alpha=\arccos\dfrac{2z-5}{3\sqrt{(z-3)^2+2}}$.

11. $\frac{9}{2}$. ● Воспользуйтесь формулами $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|\sin A$, $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}\right)^2}$.

12. $\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$. ● Покажите, что искомый угол равен углу между векторами $\overline{AB}+\overline{BC}$ и $\overline{BC}-\overline{AB}$.

13. $\arccos\dfrac{63}{\sqrt{6441}}$. **14.** $|\overline{AC}|=5$; $O\left(\frac{5}{2};1;1\right)$.

15. $\bar b=\left\{1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$. ▲ Пусть $\bar b=\{x;y;z\}$; тогда из условия коллинеарности имеем $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=-\frac{z}{1}=t$, или $x=2t$, $y=t$, $z=-t$. Подставляя эти равенства в скалярное произведение $\bar a\,\bar b=3$, находим $t=\frac{1}{2}$. **16.** $\bar c=\{-3;3;3\}$. **17.** $\bar c=\left\{\frac{4}{\sqrt3};-\frac{1}{\sqrt3};-\frac{2}{\sqrt3}\right\}$.

18. $\bar c=\{2;-3;0\}$. **19.** $\bar c=\{1;0;1\}$ или $\bar c=\left\{\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{\sqrt3}\right\}$. ▲ Пусть $\bar c=\{x;y;z\}$, тогда

$$|\bar c|=|\bar a|=|\bar b|=\sqrt2=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (1)$$

Согласно условию, углы φ между векторами равны, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\bar a \bar b}{|\bar a||\bar b|} = \frac{1}{2}, \ \frac{\bar a \bar c}{|\bar a||\bar c|} = \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}, \ \frac{\bar b \bar c}{|\bar b||\bar c|} = \frac{y+z}{2} + \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений (1), (2), получим ответ.

20. 5. **21.** $\bar a = \{2; -2; -2\}$.

22. $x \in (-\infty; 0)$. ● Найдите значения x, при которых одновременно выполняются неравенства $\bar a\,\bar b > 0$, $\bar b\,\bar c < 0$, где $\bar c = \{0; 1; 0\}$.

23. ● Найдите $\overline{MQ} \cdot \overline{NP}$, где $\overline{MQ} = \overline{MP} + \overline{PQ}$, $\overline{NP} = \overline{NQ} + \overline{QP}$.

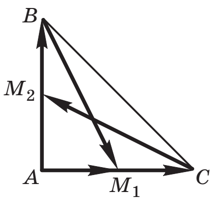


Рис. 21

24. $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. ▲ В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC (рис. 21) имеем $|\overline{AC}| = |\overline{AB}|$, BM_1 и CM_2 — медианы,

$$\overline{BM_1} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{AB},$$

$$\overline{CM_2} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AC}.$$

Перемножив два последних векторных равенства и учитывая, что $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, находим $\overline{BM_1} \cdot \overline{CM_2} = \frac{5}{4}|\overline{AB}|^2\cos\varphi = -\frac{1}{2}(\overline{AC}^{\,2} + \overline{AB}^{\,2}) = -|\overline{AB}|^2$, откуда получаем ответ.

25. $\overline{BM} = \frac{\bar b \bar c}{|\bar c|^2}\cdot\bar c - \bar b$. ▲ Имеем (рис. 22)

$$\overline{BM} = \overline{AM} - \bar b, \qquad (1)$$

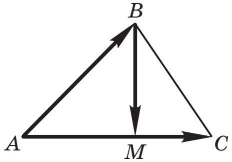


Рис. 22

где $\overline{AM} = \gamma\bar c$ (γ — некоторое действительное число). Так как вектор $\overline{BM}$ перпендикулярен вектору $\bar c$, то $\overline{BM}\cdot\bar c = 0$. Следовательно, $\gamma\bar c^{\,2} - \bar b\cdot\bar c = 0$, т. е. $\gamma = \frac{\bar b \cdot \bar c}{|\bar c|^2}$. Подставив найденное для γ выражение в уравнение (1), получим ответ.

26. $\left\{-\frac{20}{7}; -\frac{30}{7}; \frac{10}{7}\right\}$. ● Воспользуйтесь решением задачи 25.

27. $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$. ● Используя результат задачи 25, найдите $\cos\varphi = \frac{\overline{BM}_1 \cdot \overline{DM}_2}{|\overline{BM}_1| \cdot |\overline{DM}_2|}$, где $\overline{BM}_1 = \left\{\frac{4}{19}; \frac{1}{9}; -\frac{8}{9}\right\}$, $\overline{DM}_2 = \{2; -2; 1\}$.

28. $2x + 2y + 3z - 6 = 0$. ▲ Запишем уравнение плоскости в общем виде:

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (1)$$

Подставляя поочередно координаты точек M_1, M_2, M_3 в уравнение (1), получаем систему уравнений

$$a - b + 2c = -d,\ 3b = -d,\ 2a + b = -d,$$

решив которую найдем $a = -\frac{d}{3}$, $b = -\frac{d}{3}$, $c = -\frac{d}{2}$. При этих значениях коэффициентов a, b и c уравнение (1) примет вид $-d(2x + 2y + 3z - 6) = 0$. Сократив на $(-d)$ $(d \neq 0)$, получим искомое уравнение.

29. $x + z - 4 = 0$. ▲ Пусть $\overline{n} = \{a; b; c\}$ — нормальный вектор плоскости α, проходящей через точку A (4; 0; 0). Так как плоскость α параллельна оси Oy, то вектор $\overline{n}$ перпендикулярен любому вектору, параллельному оси Oy, например вектору $\overline{j} = \{0; 1; 0\}$. Отсюда следует, что $\overline{n}\,\overline{j} = b = 0$, т. е. уравнение плоскости α имеет вид $a(x - 4) + cz = 0$ или $a_1(x - 4) + z = 0$, где $a_1 = \frac{a}{c}$. Подставляя координаты точки B в последнее уравнение, получаем $a_1(0 - 4) + 4 = 0$, $a_1 = 1$, откуда $x + z - 4 = 0$.

30. -1. ▲ Если $D \in ABC$, то векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны и поэтому $\overline{AD} = \lambda\overline{AB} + \mu\overline{AC}$, где хотя бы один из коэффициентов λ, μ отличен от нуля. В координатной форме это уравнение можно переписать так: $(k - 1;\ 2;\ 2) = \lambda\ (-2;\ 3;\ 1) + \mu(0;\ 2;\ -2)$, отсюда получаем систему уравнений

$$-2\lambda = k - 1,\ 3\lambda + 2\mu = 2,\ \lambda - 2\mu = 2,$$

из которой находим $\lambda = 1$ и $k = -2\lambda + 1 = -2 + 1 = -1$.

Замечание. Задачу можно решить также, написав предварительно уравнение плоскости ABC (см. решение задачи 28) и подставив в это уравнение координаты точки D.

31. а) ● См. решение задачи 30; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $21\ \frac{\sqrt{10}}{2}$. ● Воспользуйтесь формулой $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\ |\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}|$.

32. $\frac{\pi}{3}$. ● Для нахождения угла между плоскостями ABC и ABD определите угол между нормальными векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ этих плоскостей.

33. а) $A\ (1;\ 2;\ 0)$; $B\ (0;\ 0;\ 2)$. ▲ Полагая в системе уравнений

$$2x + 3y + 4z - 8 = 0,\ 4x + y + 3z - 6 = 0 \qquad (1)$$

$z = 0$, найдем абсциссу и ординату точки A пересечения прямой p с плоскостью xOy, т. е. найдем $x = 1$, $y = 2$. Аналогично находим координаты точки B (в системе (1) надо положить $x = 0$); б) $\arcsin\frac{2}{3}$. ● Величину искомого угла можно найти из равенства $\cos\varphi = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{n}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{n}|}$, где $\overline{BA} = \{1;\ 2;\ -2\}$ и $\overline{n} = \{0;\ 1;\ 0\}$ — нормальный вектор плоскости xOz (φ — угол между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{n}$).

34. а) $E(12;\ 0;\ 3)$; $F_1(0;\ 6;\ 12)$; $G(6;\ 12;\ 0)$; б) $7x + 5y + 6z - 102 = 0$; в) $\frac{3\sqrt{10}}{11}$. ● Уравнение прямой, проходящей через точку B_1 и перпендикулярной плоскости EF_1G, имеет вид $\frac{x - 0}{7} = \frac{y - 0}{5} = \frac{z - 12}{6}$, поскольку вектор $\{x;\ y;\ z - 12\}$ коллинеарен вектору $\{7;\ 5;\ 6\}$. Определите координаты точки M пересечения этой прямой с плоскостью EF_1G и найдите расстояние по формуле $B_1M = \sqrt{(x_{B_1} - x_M)^2 + (y_{B_1} - y_M)^2 + (z_{B_1} - z_M)^2}$.

35. $\arccos\left(-\frac{16}{21}\right)$. **36.** $\arccos\left(-\frac{25}{27}\right)$. **37.** $\bar{a} = \{1; 2; 2\}$. **38.** 13.
39. $|\bar{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = \sqrt{89}$. **40.** c^2. **41.** При $a = -1$. **42.** $\frac{5\pi}{6}$.
43. C (0; 3; 0). **44.** $\bar{c} = \{-3; 3; 3\}$. ▲ Запишем искомый вектор в виде $\bar{c} = x\bar{i} + + y\bar{j} + z\bar{k}$. Из условия следует:

$$\begin{cases} \bar{c}\,\bar{a} = 2x + 3y - z = 0, \\ \bar{c}\,\bar{b} = x - 2y + 3z = 0, \\ \bar{c}\cdot(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = 2x - y + z = -6. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 3 и сложив со вторым, имеем $7x + 7y = 0 \Rightarrow y = -x$. Далее, заменив y на $-x$ в первом уравнении, получаем $z = -x$. Наконец, заменив в третьем уравнении y и z на $-x$, находим $x = -3$, поэтому $y = 3$, $z = 3$.

45. $-\frac{18}{13}$. ▲ Имеем $\overline{AB} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}$. $\text{пр}_{\bar{c}}\,\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{6+24-48}{13} = -\frac{18}{13}$. **46.** $\frac{17}{5}$. **47.** $-\frac{12}{\sqrt{14}}$. **48.** $\sqrt{3}$. ▲ Единичный вектор $\bar{e}$ оси, составляющей с координатными осями равные острые углы, имеет вид $\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k}$. Поэтому

$\text{пр}_{\bar{e}}\,\bar{a} = \frac{\bar{e}\bar{a}}{|\bar{e}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{1} = \sqrt{3}$. **49.** $\bar{a} = \bar{a}_1 - 2\bar{a}_2$.

Глава VIII

Планиметрия

§ 1. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. а) ▲ Пусть C принадлежит отрезку AM. Тогда $AC + CM = AM$ и $BC = CM + MB = CM + AM$. Исключив из этих равенств AM, найдем $CM = \frac{1}{2}\,|AC - BC|$. Аналогично рассматривается случай, когда C принадлежит отрезку MB; б) ▲ Пусть C принадлежит лучу BD, где D лежит на прямой AB, тогда $MC = MB + BC$ и $AC + AM + MC = MB + MC$. Исключив из этих равенств MB, получим $MC = \frac{1}{2}\,(AC + BC)$. Случай, когда C принадлежит лучу AE, где E лежит на прямой AB, рассматривается аналогично.

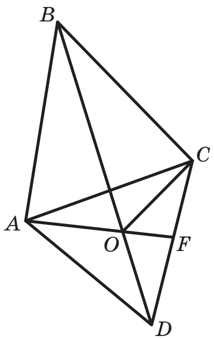


Рис. 23

2. ● Используйте свойство вертикальных углов.

3. ▲ Проведем $AF \perp CD$ (рис. 23). Прямая AF является осью симметрии треугольника ACD и пересекает отрезок BD в точке O. Отсюда следует, что $OC = OD$. Из неравенства треугольника следует, что $OB + OC > BC$, но $OB + OC = OB + OD = BD$ и поэтому $BD > BC$.

4. ● Используйте свойство накрест лежащих углов при параллельных прямых.

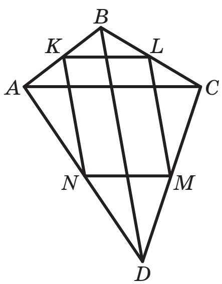


Рис. 24

5. ▲ Отрезки KL и MN (рис. 24) являются средними линиями треугольников ABC и ADC; следовательно, $KL \parallel AC \parallel MN$. Аналогично можно доказать, что $KN \parallel LM$, а это означает, что $KLMN$ — параллелограмм.

6. ▲ Проведем среднюю линию MN трапеции $ABCD$ (рис. 25). Она пересечет диагонали трапеции AC и BD в точках E и F, которые являются серединами соответствующих диагоналей (это следует из теоремы Фалеса для углов BAC и BDC). Значит, $EF \parallel AD$. Найдем длину отрезка EF; так как MF — средняя линия ΔABD, ME — средняя линия ΔABC, то из уравнения $MF = ME + EF$, или $\frac{a}{2} = EF + \frac{b}{2}$, получим $EF = \frac{1}{2}(a - b)$.

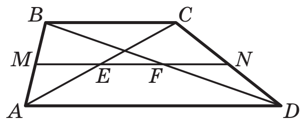


Рис. 25

7. ▲ Пусть CF — биссектриса угла BCD, DP — биссектриса угла ADC (рис. 26). Так как

$\angle BCD + \angle ADC = \pi$, то $\angle FCD + \angle MDC = \frac{\pi}{2}$, откуда следует, что $\angle CMD = \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\angle LMN = \frac{\pi}{2}$ (углы CMD и LMN — вертикальные). Аналогично доказывается, что $\angle LKN$ — прямой, а поскольку $AE \parallel CF$, заключаем, что $KLMN$ — прямоугольник.

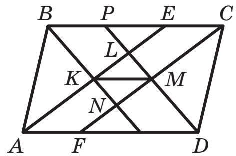


Рис. 26

Найдем теперь длину диагонали KM. Треугольники ABE и CDE равны ($AB = CD$, $\angle B = \angle D$, $BE = DF$; последнее устанавливаем из того, что биссектрисы BK и DM рассматриваемых треугольников являются высотами этих треугольников, а это означает, что $AB = BE = CD = DF$). Из равенства этих треугольников следует, что $KE = MC$ и $KECM$ — параллелограмм. Итак, $KM = EC = BC - BE = BC - AB$.

8. ▲ Пусть E и F — точки пересечения AM и AN с диагональю BD (рис. 27). Из подобия треугольников AFB и DFN (углы AFB и DFN — вертикальные, $\angle FND = \angle BAF$) следует, что $\frac{DF}{BF} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$. Таким образом, $DF = \frac{1}{3}BD$.

Аналогично (из подобия треугольников BEM и AED) находим, что $BE = \frac{1}{3}BD$, следовательно, и $EF = \frac{1}{3}BD$, т. е. $BE = EF = FD$.

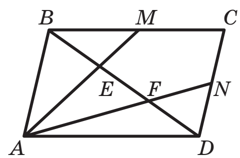


Рис. 27

9. ▲ Проведем $CE \parallel BD$ (BD — биссектриса), $E = AB \cap CE$ (рис. 28).

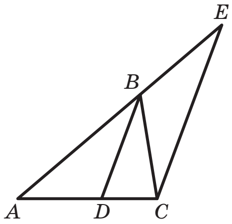


Рис. 28

Отсюда получаем, что $BE = BC$ ($\angle ABD = \angle BEC = \angle DBC = \angle BCE$ и поэтому — ΔCBE равнобедренный). Далее имеем $\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{CD}$, т. е. $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$.

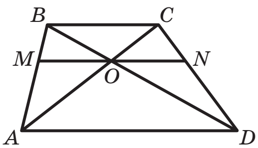


Рис. 29

10. ▲ Из подобия треугольников ABD и MBO (рис. 29) следует, что $\frac{OM}{AD} = \frac{OB}{OD}$, а из подобия треугольников ACD и OCN — что $\frac{ON}{AD} = \frac{OC}{AC}$. Но $\frac{OC}{AC} = \frac{OB}{DB}$, так как $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ $\left(\frac{AC}{OC} = 1 + \frac{AO}{OC},\ \frac{DB}{OB} = 1 + \frac{OD}{OB}\right)$, поэтому $\frac{OM}{AD} = \frac{ON}{AD}$, т. е. $OM = ON$.

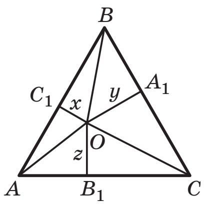


Рис. 30

11. ▲ Пусть O — произвольная точка, лежащая внутри правильного треугольника ABC (рис. 30) и пусть $OC_1 = x$, $OA_1 = y$, $OB_1 = z$, $AB = a$. Выразим площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников AOB, BOC, AOC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\ xa + \frac{1}{2}\ ya + \frac{1}{2}\ za$; с другой стороны, $S_{\Delta ABC} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Имеем равенство $a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\ a\,(x + y + z)$, или $x + y + z = a\frac{\sqrt{3}}{2} = h$, где h — длина высоты ΔABC.

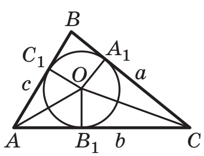


Рис. 31

12. ▲ Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 31), тогда $S = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\ OA_1 \cdot a + \frac{1}{2}\ OB_1 \cdot b + \frac{1}{2}\ OC_1 \cdot c$; так как $OC_1 = OA_1 = OB_1 = r$, то $S = r\,\frac{a+b+c}{2} = rp$, откуда $r = \frac{S}{p}$.

13. ▲ Площадь S треугольника ABC выражается формулой $S = \frac{1}{2}\, ab \sin C$, где C — величина угла, противолежащего стороне AB. Проведем диаметр AC_1 окружности, описанной около треугольника ABC. Вписанные в эту окружность углы BC_1A и ACB таковы, что $\sin C = \sin C_1$, поэтому $AB = c = 2R \sin C$. Значит, $\sin C = \frac{c}{2R}$ и $S = \frac{1}{2}\, ab\, \frac{c}{2R}$, откуда следует, что $R = \frac{abc}{4S}$.

14. ▲ Используя свойство отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки, имеем $A_1C = CB_1 = r$ (A_1CB_1O — квадрат), $A_1B = BC_1$ и $B_1A = AC_1$ (рис. 32). Отсюда следует, что $BC = A_1B + r$, $AC = AB_1 + r$ (r — радиус вписанного круга). Складывая эти равенства, получаем $BC + AC = 2r + A_1B + AB_1 = 2r + BC_1 + C_1A = 2r + AB$.

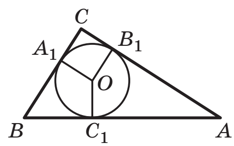


Рис. 32

Так как в прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна диаметру описанной около этого треугольника окружности, то $BC + AC = 2r + 2R$.

15. ▲ Соединим отрезками точку B с точками C и D (рис. 33). Треугольники ABC и ABD подобны ($\angle ABC = \angle ADB$, угол A — общий), поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, откуда следует, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

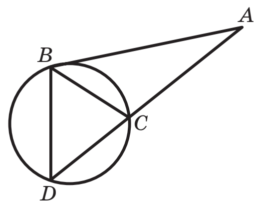


Рис. 33

16. ▲ Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник (рис. 34). Проведем перпендикуляры из вершин A и C к диагонали BD и получим четыре прямоугольных треугольника: AEB, BFC, CFD, AED.

Все точки треугольника AEB принадлежат кругу, построенному на стороне AB как на диаметре $\left(\angle E = \frac{\pi}{2}\right.$ — этот угол вписанный$\left.\right)$. Проводя аналогичные рассуждения для трех других треугольников, приходим к выводу, что

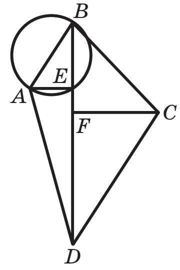


Рис. 34

любая точка четырехугольника принадлежит хотя бы одному из кругов. диаметрами которых являются стороны четырехугольника $ABCD$.

17. ● Докажите, что $\angle MPN = \angle MFH$, $\angle PNQ = \angle PMQ$.

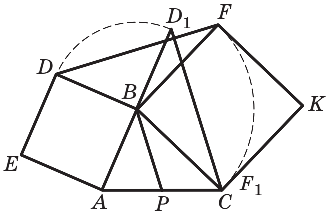


Рис. 35

18. ▲ Поворот треугольника DBF вокруг точки B на угол $90°$ (рис. 35) переводит точку D в точку D_1, а точку F — в точку F_1, совпадающую с точкой C. При этом $D_1C = DF$, а $D_1 \in AB$. Так как $AB = BD = BD_1$ (длины сторон квадрата) и $AP = PC$ (по условию), то BP является средней линией треугольника AD_1C, а это означает, что $BP = \frac{1}{2}\ D_1C = \frac{1}{2}\ DE$, т. е. $DF = 2BP$.

19. ● Докажите, что при гомотетии с центром $O = AC \cap BD$ и коэффициентом гомотетии $k = -\frac{CD}{AB}$ квадрат, построенный на основании AB, перейдет в квадрат, построенный на основании CD.

20. ▲ Так как $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$ (рис. 36), то после возведения этих равенств в квадрат и сложения их получаем

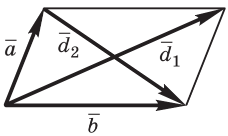


Рис. 36

$$|\bar{d}_1|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2\bar{a}\,\bar{b},$$
$$|\bar{d}_2|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2\bar{a}\,\bar{b};$$
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

§ 2. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

1. ● Постройте параллелограмм, в котором точка A была бы точкой пересечения дигоналей.

2. ● Постройте треугольник со сторонами a, b, $2m$, где a, b, m — длины данных сторон и медианы.

3. ▲ Построив точку B_1 (рис. 37), симметричную точке B относительно p, и соединив ее прямой с точкой A, получим точку $C \in p \cap AB_1$, которая удовлетворяет требованию задачи, так как неравенство $BC + AC = B_1C + AC = AB_1 < B_1C_1 + AC_1$ выполняется для любой другой точки $C_1 \in p$.

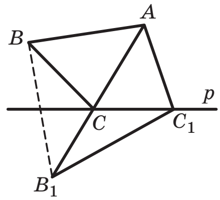


Рис. 37

4. ▲ Возьмем на сторонах угла ABC точки A_1 и C_1 (рис. 38) и построим биссектрисы углов A_1 и C_1 треугольника A_1BC_1, которые пересекутся в точке O_1. Так как в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, то точка O_1 принадлежит биссектрисе угла B.

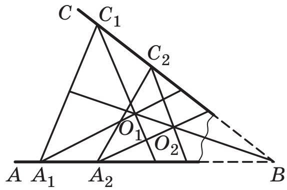


Рис. 38

Аналогично в треугольнике A_2BC_2 находим точку O_2 — точку пересечения биссектрис. Прямая O_1O_2 — искомая, поскольку она содержит биссектрису угла B.

5. ● Постройте треугольник A_1BC_1 ($A_1 \in AB$, $C_1 \in BC$), в котором точка D является точкой пересечения высот.

6. ● Постройте треугольник по трем сторонам, длины которых составляют $\frac{2}{3}$ длин данных медиан, и докажите, что удвоенные длины медиан полученного треугольника являются сторонами искомого треугольника.

7. а) ● Докажите, что если $AB = a$, $BC = b$ (рис. 39) и радиус полукруга $AO = \frac{1}{2}(a + b)$, то $DB = \sqrt{ab}$ ($DB \perp AC$). б) ● Постройте отрезки $c = a - b$ и $d = \sqrt{ab}$, а затем отрезок $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2 + ab} = \sqrt{c^2 - d^2}$ (как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами длиной c и d). в) ● Постройте отрезки $c = a - b$ и $d = b\sqrt{3}$, а затем искомый отрезок $x = \sqrt{c^2 + d^2}$.

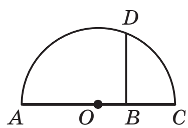


Рис. 39

8. ● По данным углам A и B постройте произвольный треугольник ABC, найдите его периметр p и докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии $k = \frac{p_1}{p}$ (где p_1 — периметр искомого треугольника) и с центром в вершине A (или в вершинах B или C), удовлетворяет всем условиям задачи.

9. ● Докажите, что отношение радиусов описанных около подобных треугольников окружностей равно отношению сходственных сторон.

10. ● а) На отрезке OA, как на диаметре, постройте окружность и докажите, что прямые, проходящие через точку A и точки пересечения окружностей, являются касательными к данной окружности.

б) ● Для нахождения отрезка AC используйте уравнение $AK^2 = AC \cdot AB$, где AK — отрезок касательной, проведенной из точки A к данной окружности (K — точка касания; см. задачу 15 §1).

11. ● Найдите радиусы окружностей R_1, R_2, R_3 из системы уравнений

$$R_1 + R_2 = a,\ R_2 + R_3 = b,\ R_3 + R_4 = c,$$

где a, b, c — длины сторон данного треугольника.

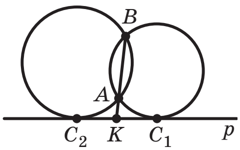


Рис. 40

12. а) ▲ Проведем прямую AB (рис. 40); $K = AB \cap p$. Используя уравнение $KC^2 = KB \cdot AK$, построим отрезок KC (см. решение задачи 10б) и отложим его по обе стороны от точки K; получим две точки C_1 и C_2. Окружности, проходящие через точки A, B, C_1 и A, B, C_2, — искомые.

Замечание. Если $AB \parallel p$, то существует только одна окружность, удовлетворяющая требованиям задачи.

б) ● Докажите, что указанным свойством обладают следующие точки: точка касания окружности меньшего радиуса, если $AB \nparallel p$; точки C_1 и C_2 касания двух окружностей одинакового радиуса, если $AB \perp p$; точка касания единственной окружности, если $AB \parallel p$.

13. ● На сторонах угла ABC (рис. 41) отложите отрезки $AB = BC = \frac{p}{2}$ (p — заданный периметр), впишите в данный угол окружность, касающуюся сторон угла в точках A и B, и из заданной точки K проведите касательную к этой окружности. Треугольник A_1BC_1 — искомый (докажите это, воспользовавшись свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки).

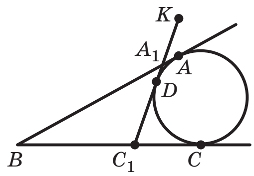


Рис. 41

§ 3. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

1. а) $\angle B = \arccos \frac{5}{13} = \arcsin \frac{12}{13}$. ● Используйте теорему косинусов; б) 84 см^2. ● Примените формулу Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = 0{,}5\ (a + b + c)$; в) $BD = h_b = 11{,}2$ см; г) 4 см. ● См. задачу 12 § 1; д) $\frac{65}{8}$ см. ● См. задачу 13 § 1; е) $28\frac{\sqrt{13}}{9}$ см. ▲ $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta CBE} = S$; $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} cl_b \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{2} al_b \sin \frac{B}{2} \Rightarrow l_b = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{B}{2}$;

ж) $\frac{\sqrt{505}}{2}$ см. ▲ Введем прямоугольную систему координат: начало координат совместим с вершиной A (рис. 42), а ось абсцисс выберем так, чтобы сторона AC принадлежала этой оси. В этой системе координат имеем $A(0;\ 0)$, $C(15;\ 0)$. Найдем координаты точки B. Ее ордината y_B численно равна высоте $h_b = 11{,}2$ см, а абсциссу определим из соотношения $h_b^2 + AD^2 = c^2$, откуда $AD = x_B = 6{,}6$. Теперь, учитывая, что $F\ (7{,}5;\ 0)$, получим

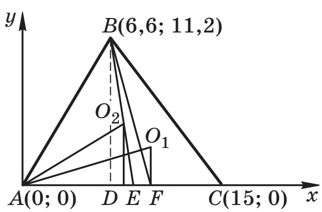


Рис. 42

$$BF = m_b = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2} = \frac{\sqrt{505}}{2};$$

з) $\frac{\sqrt{65}}{8}$. ▲ Искомое расстояние d вычислим по формуле $d = \sqrt{(x_{O_1} - x_{O_2})^2 + (y_{O_1} - y_{O_2})^2}$, где x_{O_1}, y_{O_1} — координаты центра описанной окружности, а x_{O_2}, y_{O_2} — координаты центра вписанной окружности. Определим координаты $x_{O_1} = \frac{b}{2} = 7{,}5$; $y_{O_2} = r = 4$; $y_{O_1} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{25}{8}$; $x_{O_2} = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 7$ $\left(\text{мы учли, что } \cos A = \frac{33}{65}\right)$. Теперь легко найти d; и) $\frac{\sqrt{265}}{4}$. ▲ Так как координаты центра описанной окружности известны: $O_1\left(7{,}5; \frac{25}{8}\right)$, то для нахождения GO_1 необходимо определить координаты точки G. Найдем их. Векторы $\overline{BF}$ и $\overline{BG}$ коллинеарны, т. е. $\overline{BG} = \lambda\,\overline{BF}$, причем $\lambda = \frac{2}{3}$. Имеем $\overline{BF}$ (0,9; −11,2) и $\overline{BG} = \left(0{,}6; -\frac{22{,}4}{3}\right)$. Пусть x_G и y_G — абсцисса и ордината точки G соответственно. Тогда $x_G - x_B = x_G - 6{,}6 = 0{,}6$ и $y_G - y_B = y_G - 11{,}2 = -\frac{22{,}4}{3}$, откуда $x_G = 7{,}2$ и $y_G = \frac{11{,}2}{3} = \frac{56}{15}$. По формуле $\sqrt{(x_G - x_{O_1})^2 - (y_G - y_{O_1})^2}$ найдем расстояние GO_1.

2. $a^2 \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$. **3.** 4 см. **4.** 5,2 м. **5.** $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{3\pi}{4}$. **6.** $\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$. **7.** 10 см; 10 см; 12 см. **8.** 1. **9.** 1 дм. **10.** $\arccos\frac{2}{3}$; $\arccos\frac{2}{3}$; $\pi - 2\arccos\frac{2}{3}$. **11.** 13 см; 15 см. **12.** 3; 4; 5. **13.** 6.

14. Rr. ▲ Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы, тогда $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Легко установить, что $a + b + c = 2R$, следовательно, $p = R$; так как $S = pr$, то $S = Rr$.

15. 27 дм; 64 дм. **16.** $\sqrt{7}$. **17.** 10 см; 10 см; 1 см. **18.** $\frac{1}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$ см^2.

19. $\frac{3}{4}S$. ▲ Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC; AN, BF, CM — его медианы. На луче BF за точку F возьмем точку P так, чтобы $PF = OF$, и соединим точки A и P отрезком. Длины сторон треугольника AOP равны $\frac{2}{3}\ AN$, $\frac{2}{3}\ CM$, $\frac{2}{3}\ BF$. Поэтому искомая площадь равна отношению $\frac{S}{3} : \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

20. $bc\ \frac{\sqrt{2}}{b+c}$. **21.** $1{,}5\ \sqrt{7}$ см; 1,5 см; 3,5 см. **22.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$. **23.** $\sqrt{b(b+c)}$. **24.** $\frac{a^2b^2}{2a^2-b^2}$. **25.** $\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{\sqrt{5}}{8}$. **26.** 7 см; 15 см. **27.** 6 см; 9 см; $1{,}5\ \frac{\sqrt{34}}{2}$ см. **28.** $0{,}5\,(a - b)^2 \sin\alpha$. **29.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

30. 216 см^2. **31.** 2 см. **32.** 15 см. ● В трапеции $ABCD$ (рис. 43) проведите $CE \parallel AB$ и найдите длину высоты CF треугольника ECD.

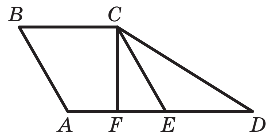


Рис. 43

33. $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. ● Продолжите боковые стороны трапеции $ABCD$ до пересечения в точке E (рис. 44) и найдите площадь трапеции как разность площадей треугольников AED и BEC.

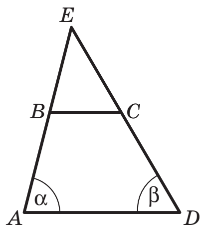


Рис. 44

34. 2 см; 5 см; 5 см; 8 см. **35.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}r^2$. ● Докажите, что четырехугольник $ABEK$ — трапеция. **36.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ см. **37.** $\frac{85}{8}$ см. ▲ Проведем из вершины B перпендикуляр к основанию AD до пересечения с окружностью в точке F (рис. 45) Отрезок CF — диаметр описанной около трапеции $ABCD$ окружности (угол $\angle FBC = \frac{\pi}{2}$ является вписанным). Из подобия треугольников AEB и FED следует, что $\frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EF}$ или $EF =$

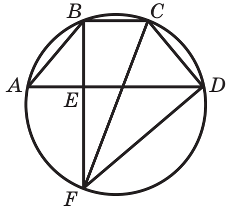


Рис. 45

$= AE \cdot \dfrac{ED}{BE} = \dfrac{21-9}{2} \cdot \dfrac{1}{8}\left(21 - \dfrac{21-9}{2}\right) = \dfrac{45}{4}$. Далее из прямоугольного треугольника FBC находим CF и R:

$$CF = \sqrt{|BF|^2 + |BC|^2} = \sqrt{\left(8 + \frac{45}{4}\right)^2 + 9^2} = \frac{85}{4};\ R = \frac{1}{2}\ CF = \frac{85}{8}\ \text{(см)}.$$

38. $\dfrac{5\pi}{12}$; $\dfrac{7\pi}{12}$. ● Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобочная и что длина ее средней линии равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ AD$.

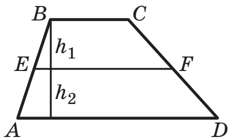


Рис. 46

39. $\sqrt{\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}$. ▲ Пусть $BC = b$, $AD = a$, $EF = x$, а высоты трапеций $EBCF$ и $AEFD$ равны h_1 и h_2 соответственно (рис. 46). По условию $S_{EBCF} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$ и $S_{AEFD} = \dfrac{1}{2}\ S_{ABCD}$ или $\dfrac{1}{2}\ h_1\,(x + b) = \dfrac{1}{4}\ (a + b)(h_1 + h_2)$ и $\dfrac{1}{2}\ h_2\,(x + a) = \dfrac{1}{4}\ (a + b)(h_1 + h_2)$. Преобразуем эти уравнения:

$$\frac{2h_1}{h_1 + h_2} = \frac{a+b}{x+b}, \tag{1}$$

$$\frac{2h_2}{h_1 + h_2} = \frac{a+b}{x+a}. \tag{2}$$

Сложив равенства (1) и (2), получим уравнение

$$2 = (a + b) \cdot \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right),$$

решив которое найдем ответ.

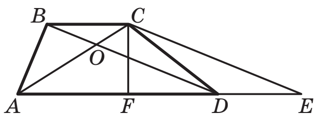


Рис. 47

40. $\left(\dfrac{a+b}{a}\right)^2$. ▲ Проведем $CE \parallel BD$ (рис. 47). Площади треугольников ABC и CDE равны, так как $BC = DE = b$, а высота этих треугольников CF равна высоте трапеции. Следовательно, трапеция $ABCD$ равновелика треугольнику ACE. Треугольники ACE и AOD подобны, поэтому $\dfrac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta AOD}} = \dfrac{S_{ABCD}}{S_{\Delta AOD}} = \dfrac{AE^2}{AD^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2}$. **41.** $3r$. **42.** $5R^2 \arcsin \dfrac{r}{R-r}$. ● Определите величину угла сектора α и затем вычислите площадь сектора S по формуле $S = \frac{R^2\alpha}{2}$. **43.** $5R^2\frac{2\sqrt{3}+5\pi}{6}$. **44.** $\frac{1}{3}$.

45. $\frac{Rr}{(R+2r)^2}[3R - 2r \pm \sqrt{8(R^2-2Rr)}]$.

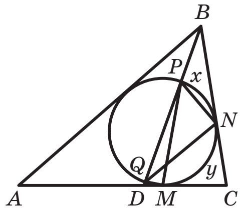


Рис. 48

46. $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$. ▲ Так как BD является биссектрисой угла ABC, (рис. 48), то PQ — диаметр вписанной окружности и треугольники PQM и PQN — прямоугольные $\left(\angle PNQ = \angle PMQ = \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть дуга PN содержит x рад, дуга NMQ — y рад. Тогда $\angle DBC = \frac{y-x}{2} = \frac{\pi}{6}$, а $y + x = \pi$; отсюда находим $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{2\pi}{3}$ и $\angle PQN = \frac{\pi}{6}$, а $\angle QPN = \frac{\pi}{3}$. Найдем углы $\angle MQP$ и $\angle MPQ$; $\angle ABC = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}$; пусть дуга MN содержит z рад, а дуга $MQPN$ — t рад. Тогда $\frac{t-z}{2} = \frac{5\pi}{12}$, $t + z = 2\pi$. Из этих уравнений находим $z = \frac{7\pi}{12}$ и далее разность $y - z = \frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. Таким образом, $\angle QPM = \frac{\pi}{24}$. Положив $PQ = 1$, найдем $S_{\Delta PQM}$ и $S_{\Delta PQN}$:

$$S_{\Delta PQM} = \frac{1}{2}\cdot 1 \sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12};$$

$$S_{\Delta PQN} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$

и теперь получим искомое отношение: $x_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$;

здесь мы учли, что $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

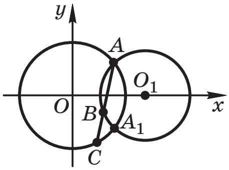


Рис. 49

47. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. ▲ Введем прямоугольную систему координат xOy так, чтобы начало координат совпало с центром большей окружности, а ось абсцисс содержала отрезок, соединяющий центры окружностей OO_1 (рис. 49). Для нахождения AC определим координаты точек A и C. Уравнения окружностей с центрами в точках O и O_1 имеют вид

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2, \tag{1}$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$

Система уравнений (1) и (2) имеет два решения, одно из которых $\left(x = \frac{5}{4},\ y = \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ определяят координаты точки A.

Пусть x_C и y_C — координаты точки C, тогда

$$x_B = \frac{1}{2}(x_A + x_C),\ y_B = \frac{1}{2}(y_A + y_C).$$

Имеем систему уравнений

$$x_C^2 + y_C^2 = 2,\ \left(\frac{x_C + \frac{5}{4}}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{y_C + \frac{\sqrt{7}}{4}}{2}\right)^2 = 1,$$

решив которую получим $x_C = \frac{13}{16}$, $y_C = -\frac{7\sqrt{7}}{16}$. Теперь находим

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{13}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{7\sqrt{7}}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

48. 4,5 см^2. ▲ Пусть x — длина одной из диагоналей, тогда длина другой равна $6 - x$. Площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения длин этих диагоналей: $S(x) = 0{,}5x(6 - x)$, $x \in [0; 6]$. Следовательно, наибольшее возможное значение площади этого четырехугольника совпадает с наибольшим значением функции $S(x)$ на отрезке $[0; 6]$. Так как $S'(x) = 0$ при $x = 3$ (точка максимума) и $S(0) = S(6) = 0$, то функция $S(x)$ достигает наибольшего значения в точке $x = 3$:

$$\max_{x \in [0;6]} S(x) = S(3) = 4{,}5 \text{ см}^2.$$

49. $2(\sqrt{2}-1)$ ● Полусумма длин оснований трапеции равна $\frac{1}{2}[4-(1+\sqrt{2})x]$, где x — длина высоты. **50.** $\frac{1}{2}$ arcsin α. **51.** Площадь параллелограмма будет наибольшей, если одна из его сторон совпадает со средней динией треугольника.

52. 20; $10\sqrt{3}$. ▲ Пусть $\angle ACH = \angle HCM = \angle MCB = \alpha$, CH — высота, CM — медиана (рис. 50). Тогда $HM = x = \operatorname{tg}\alpha$, $HB = 3x = \operatorname{tg}2\alpha$. Отсюда $\operatorname{tg}2\alpha = 3\operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 3\operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow$

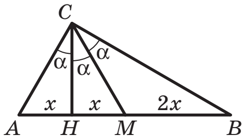


Рис. 50

$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}\alpha \neq 0) \Leftrightarrow 2 = 3 - 3\operatorname{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (\operatorname{tg}\alpha > 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (так как угол α — острый). Значит, $C = \frac{\pi}{2}$,

$x = 10\sin\frac{\pi}{6} = 5$, $AB = 4x = 20$, $BC = \sqrt{400-100} = 10\sqrt{3}$.

53. $\frac{92}{21}$; $\frac{125}{21}$. ▲ По условию $AC = CM = 5$, $CH = 2\sqrt{6}$ (рис. 51). Согласно теореме Пифагора, $AH = MH = 1$. Так как $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, то $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha =$

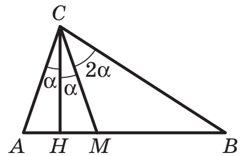


Рис. 51

$= \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = \frac{2\sqrt{6}}{5}\left(4\cdot\frac{24}{25} - 3\right) = \frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{96-75}{25} = \frac{42\sqrt{6}}{125}$.

Значит, $BC = \frac{CH}{\cos 3\alpha} = 2\sqrt{6} : \frac{42\sqrt{6}}{125} = \frac{125}{21}$.

Для отыскания MB воспользуемся тем, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Имеем $\frac{MB}{CB} = \frac{AM}{CA} \Rightarrow MB = \frac{125}{21}\cdot\frac{2}{5} = \frac{50}{21}$,

$AB = 2 + \frac{50}{21} = \frac{92}{21}$. **54.** $\frac{1}{4\cos\varphi\sin^2\frac{\varphi}{2}}$. **55.** $\frac{20\sqrt{3}}{7}$.

56. $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$. ▲ Положим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $AB = BC = l$ (рис. 52).

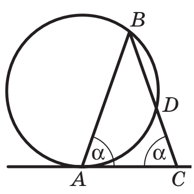


Рис. 52

Тогда $AC = 2l\cos\alpha$. По условию $BD = \frac{\sqrt{2}}{2}CD$, откуда $BD + CD = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)CD = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\ CD = l \Rightarrow CD = \frac{2}{2+\sqrt{2}}\ l = (2 - \sqrt{2}\,)l$. Согласно теореме о секущей и касательной к окружности (см. задачу 15 § 1), имеем $AC^2 = CD \cdot BC \Leftrightarrow 4l^2\cos^2\alpha = l^2(2 - \sqrt{2}\,)$. Значит, $2 + 2\cos 2\alpha = 2 - \sqrt{2}$, $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $2\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = \frac{3\pi}{8}$. Итак, углы треугольника равны $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$. **57.** $2r$; $\frac{10}{3}\ r$; $4r$. **58.** $2\sqrt{Rr}$.

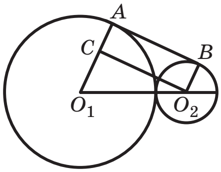


Рис. 53

▲ По условию A и B — точки касания отрезка AB с окружностями (рис. 53); пусть O_2C — отрезок, параллельный AB; тогда $O_2C = AB$, $\angle O_1CO_2$ — прямой, $O_1C = R - r$, $O_1O_2 = R + r$ (отрезок O_1O_2 проходит через точку касания окружностей). По теореме Пифагора находим

$$O_2C = \sqrt{(R-r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4Rr} = 2\sqrt{Rr}.$$

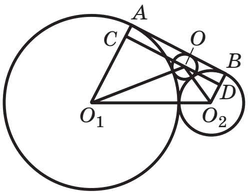


Рис. 54

59. $\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$. ▲ По условию AB — касательная к окружностям, $O_1A = R$, $O_2B = r$. Пусть ρ — искомый радиус окружности с центром в точке O (рис. 54). Имеем $CD \parallel AB$, $CD = AB$, $\angle O_1CO = \angle ODO_2 = \frac{\pi}{2}$, $O_1C = R - \rho$, $O_2O = r - \rho$. Учитывая решение задачи 58 и применив теорему Пифагора, получаем $CD = CO + OD = \sqrt{(R+\rho)^2 - (R-\rho)^2} + \sqrt{(r+\rho)^2 - (r-\rho)^2} = 2\sqrt{R\rho} + 2\sqrt{r\rho} = AB = 2\sqrt{Rr} \Rightarrow \sqrt{\rho}\,(\sqrt{R} + \sqrt{r}) = \sqrt{Rr} \Rightarrow \rho = \frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

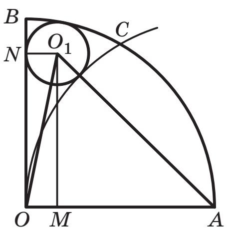


Рис. 55

60. $\frac{R}{6}$. ▲ Пусть r — искомый радиус вписанной окружности, O_1 — центр вписанной окружности, $\angle NOA = 90°$, $O_1N \perp ON$, $O_1N = r \Rightarrow OM = r$, $AM = R - r$ (рис. 55). Так как прямая, проходящая через центры касающихся окружностей, проходит через точку их касания, то

$OO_1 = R - r$, $O_1A = R + r$. Согласно теореме Пифагора, имеем $O_1M = \sqrt{(R-r)^2 - r^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$, откуда $r = \frac{R}{6}$.

61. $R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$. ▲ Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей (рис. 56). Площадь треугольника $O_1O_2O_3$ равна $R \times$ $\times R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$. Площадь сектора круга радиуса R с углом 60° при вершине равна $\frac{\pi R^2}{6}$, а площадь трех секторов равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Следовательно, площадь криволинейного треугольника ABC равна $R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$.

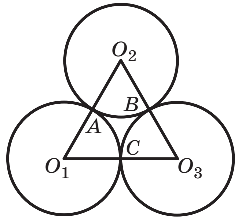


Рис. 56

62. $12\sqrt{5} - 8 \arccos \frac{11}{21} - \frac{9}{2} \arccos \frac{2}{7} -$ $- \frac{25}{2} \arccos \frac{2}{3}$. ▲ По условию $O_1O_2 = 7$, $O_2O_3 = 8$, $O_1O_3 = 9$, $p = 12$ (рис. 57). Согласно формуле Герона, площадь треугольника $O_1O_2O_3$ есть $S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$.

Используя теорему косинусов, находим

$$\cos\alpha = \frac{11}{21},\ \alpha = \arccos\frac{11}{21};\ \cos\beta = \frac{2}{7},$$

$$\beta = \arccos\frac{2}{7};\ \cos\gamma = \frac{2}{3},\ \gamma = \arccos\frac{2}{3}.$$

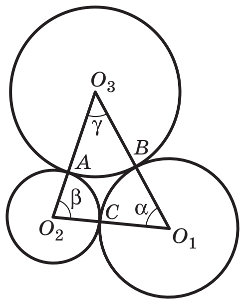


Рис. 57

Таким образом, площадь сектора O_1BC есть

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \arccos\frac{11}{21} = 8 \arccos\frac{11}{21};$$

площадь сектора O_2AC есть

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \arccos\frac{2}{7} = \frac{9}{2} \arccos\frac{2}{7};$$

площадь сектора O_3BC есть

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \arccos\frac{2}{3} = \frac{25}{2} \arccos\frac{2}{3}.$$

Итак, площадь криволинейного треугольника ABC равна $S - S_1 - S_2 - S_3$.

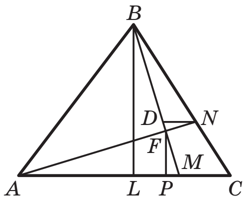


Рис. 58

63. а) $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{S_1}{S_2} = 5$. ▲ Пусть a, b — длины сторон BC и AC соответственно, S, $S_{\Delta ANB}$, $S_{\Delta ABM}$, $S_1 = S_{\Delta ABF}$, $S_2 = S_{\Delta FNB}$, $S_{\Delta AFM}$ — площади треугольников ABC, ANB, ABM, ABF, FNB, AFM (рис. 58) соответственно. Тогда длины отрезков CN, NB, MC, AM будут равны соответственно $\frac{2}{5}a$, $\frac{3}{5}a$, $\frac{b}{4}$, $\frac{3b}{4}$.

Проведем отрезок $DN \parallel AC$, $D \in BM$; $\Delta DBN \backsim \Delta MBC$ (докажите) $\Rightarrow \frac{DN}{MC} = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow DN = \frac{3}{5} \cdot \frac{b}{4} = \frac{3b}{20}$; $\frac{DM}{BM} = \frac{CN}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow$ $\Rightarrow DM = \frac{2}{5}\ BM$; $\Delta DFN \backsim \Delta MFA$ (докажите), отсюда следует $\frac{DF}{FM} = \frac{DN}{AM} = \frac{3b}{20} : \frac{3b}{4} = \frac{1}{5} \Rightarrow FM = \frac{5}{6}\ DM$. Так как высота BL треугольников ABM и ABC общая, а основания связаны соотношением $AM = \frac{3}{4}\ AC$, то $S_{\Delta ABM} = \frac{3}{4}\ S$. Аналогично находим $S_{\Delta ANB} = \frac{3}{5}\ S$. Пусть $FP \perp AC$. Тогда $\Delta FPM \backsim \Delta BLM$ (докажите) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{FP}{BL} = \frac{FM}{BM} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5}\ \frac{BM}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow FP = \frac{BL}{3}$. Основание треугольников AFM и ABM общее, а высота FP треугольника AFM равна $\frac{1}{3}$ высоты ΔABC, поэтому

$$S_{\Delta AFM} = \frac{1}{3}\ S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}\ S = \frac{S}{4},$$

$$S_{\Delta ABF} = S_{\Delta ABM} - S_{\Delta AFM} = \frac{3}{4}S - \frac{S}{4} = \frac{S}{2} \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{1}{2},$$

$$S_{\Delta FNB} = S_{\Delta ABN} - S_1 = \frac{3}{5}S - \frac{S}{2} = \frac{S}{10} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 5.$$

64. 6; $\frac{9}{2}$; $\frac{9}{2}$. ▲ *I способ.* Пусть N и L точки касания окружности со сторонами BC и AC треугольника, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника ABC, точка O — центр вписанной окружности (рис. 59). Так как $BM = 3$, то $BN = 3$ (длины касательных отрезков к окружности, проведенных из общей точки, равны). Из прямоугольного треугольника BMC находим $BC = \dfrac{MB}{\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{3}{\frac{2}{3}} = \dfrac{9}{2}$. Поэтому

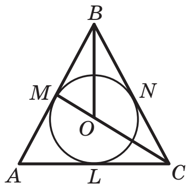


Рис. 59

$$LC = NC = BC - BN = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника OMB находим

$$OM = r = MB\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right) = 3\sqrt{\frac{1-\cos\arccos\frac{2}{3}}{1+\cos\arccos\frac{2}{3}}} = 3\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Обозначим через x длины отрезков AM и AL, а через p — полупериметр треугольника ABC. Тогда

$$S = rp = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}+x+x+3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+3)\cdot\frac{9}{2}\cdot\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{2}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{9+2x}{\sqrt{5}} = \frac{3(x+3)}{2}\sqrt{1-\frac{4}{9}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(9+2x) = (x+3)5 \Rightarrow x = 3.$$

Следовательно, $AB = 6$, $AC = BC = \frac{9}{2}$.

II способ. Отрезок $MC \perp AB$ и проходит через точку касания вписанной в треугольник ABC окружности, значит, этот отрезок проходит через центр вписанной окружности. Поскольку стороны AC и BC касаются окружности, ее центр принадлежит биссектрисе угла, ограниченного этими сторонами. Поэтому $\angle MCA = \angle MCB$. Но $\angle AMC = \angle BMC$ (эти углы прямые), тогда $\angle MAC = \angle MBC$, т.е. треугольник ABC равнобедренный: $AC = BC = BM : \cos\arccos\frac{2}{3} = 3 : \frac{2}{3} = \frac{9}{2}$. Следовательно, отрезок MC является высотой, биссектрисой и медианой, опущенной из вершины C треугольника ABC. Итак, $AB = 6$, $AC = BC = \frac{9}{2}$.

Глава IX

Стереометрия

§ 1. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ. МНОГОГРАННИКИ

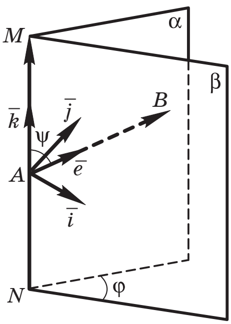


Рис. 60

1. $12\frac{\sqrt{2}}{5}$ см или $\frac{\sqrt{337}}{5}$ см. **2.** $\arcsin(\sin\varphi \times$ $\times \sin\psi)$. ▲ Обозначим плоскости граней двугранного угла с ребром NM через α и β (рис. 60). Имеем $A \in NM$, $AB \in \alpha$, $\angle(\overline{NM}$, $\overline{AB}) = \psi$, $\angle(\alpha, \beta) = \varphi$. Введем прямоугольный базис $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ с началом в точке A так, что $\bar{i} \perp \overline{NM}$, $\bar{j} \perp \overline{NM}$, $\bar{k} \uparrow\uparrow \overline{NM}$ и $\bar{j} \perp \beta$.

Пусть $\bar{e}$ — орт, сонаправленный с вектором $\overline{AB}$. Разложим орт $\bar{e}$ по базису $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$; $\bar{e} = \cos\varphi \sin\psi \cdot \bar{i} + \sin\varphi \sin\psi \cdot \bar{f} + \cos\psi \cdot \bar{k}$. Далее имеем $\sin\angle(\bar{e}, \bar{\beta}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle(\bar{e}, \bar{j})\right) = \cos\angle(\bar{e}, \bar{j}) = \bar{e} \cdot \bar{j} =$ $= \sin\varphi \sin\psi$.

3. $\arccos(\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi)$. Задача разрешима, если $\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi \leqslant 1$.

4. $2l(3 + \operatorname{tg}^2\varphi)$; 0. ● Рассмотрите два случая: 1) точки A и B лежит по одну сторону от плоскости γ; 2) точки лежат по разные стороны от плоскости γ.

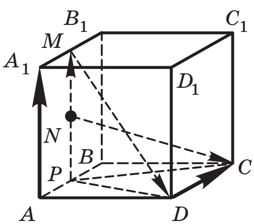


Рис. 61

5. $m + \frac{2h}{3}$; $2h - \frac{m}{3}$; $\frac{m}{3}$. **6.** $2l \times$ $\times \sin\alpha\sqrt{2S + l^2\cos^2\alpha}$. **7.** $\sqrt[3]{\frac{2V\operatorname{tg}^2\beta}{\sin\alpha}}$. **8.** $\frac{b^3}{\sqrt{2}}$.

9. $\arccos\frac{5}{3\sqrt{6}}$. ▲ Пусть $\left|\overline{AA_1}\right| = 2$, тогда из прямоугольных треугольников NPC и MPD (рис. 61) найдем $\overline{NC} = \sqrt{6}$,

$\overline{MD} = 3$. Рассмотрим векторное равенство $\overline{NC} = \overline{NM} + \overline{MD} + \overline{DC}$, или $\overline{NC} - \overline{MD} = \overline{NM} + \overline{DC}$. Возведя это равенство в квадрат, получим $\overline{NC}^2 + \overline{MD}^2 - 2\overline{NC} \cdot \overline{MD} = \overline{NM}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{NM} \cdot \overline{DC}$, или $6 + 9 - 2\sqrt{6} \cdot \cos\varphi = 1 + 4 + 0$ (мы учли, что $\overline{NM} \perp \overline{DC}$), где $\varphi = \angle(\overline{NC}, \overline{MD})$. Решив уравнение $\cos\varphi = \frac{5}{3\sqrt{6}}$, получим ответ.

10. $\arccos\frac{1}{3}$. ▲ Введем прямоугольный базис $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ с началом в вершине куба B (рис. 62).

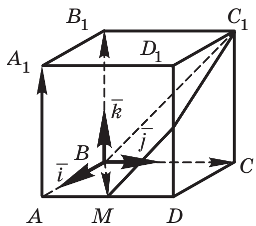


Рис. 62

Искомый угол между плоскостями BCB_1 и BC_1M равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Найдем нормальные векторы этих плоскостей. Очевидно, что вектор $\overline{n}_1 \perp BCB_1$ имеет координаты $\{1;\ 0;\ 0\}$. Пусть $\overline{n}_2 = \{a;\ b;\ c\}$ — нормальный вектор плоскости BC_1M. Тогда $\overline{n}_2 \cdot \overline{BC}_1 = 0$ и $\overline{n}_2 \cdot \overline{BM} = 0$. Векторы $\overline{BC}_1$ и $\overline{BM}$ имеют соответственно координаты $\{0;\ 1;\ 1\}$ и $\left\{1;\ \frac{1}{2};\ 0\right\}$. Получим уравнения $b + c = 0$, $a + \frac{b}{2} = 0$. Полагая $c = 2$, находим $b = -2$ и $a = 1$; таким образом, $\overline{n}_2 = \{1;\ -2;\ 2\}$. Далее определяем угол между векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$:

$$\cos\angle(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1\overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 0(-2) + 0 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Так как $\frac{1}{3} > 0$, то угол между векторами равен углу между прямыми, паралельными этим векторам и, следовательно, искомому углу между плоскостями BCB_1 и BC_1M.

Замечание. В качестве $\overline{n}_2$ можно было взять вектор $\overline{n}_2 = \left\{\frac{c}{2};\ -c;\ c\right\}$, $c \neq 0$.

11. $a\,\dfrac{\sqrt{29}}{3}$. **12.** $l^3\sin^2\beta\,\sqrt{3\cos^2\beta-\sin^2\dfrac{\beta}{3}}$.

13. $\dfrac{p^3\sin\alpha}{16\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^3}\cdot\dfrac{\sqrt{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$. **14.** $\dfrac{\sqrt{(S\cos\alpha)^3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt[4]{27}}$.

15. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ● Определите угол между прямыми AC и PQ, используя равенство $\overline{PQ}\cdot\overline{CA}=|\overline{PQ}|\,|\overline{CA}|\cos\varphi$, где $\overline{PQ}=\overline{QC}+\dfrac{\overline{CA}+\overline{CB}}{3}$ и φ — искомый угол.

16. $a^3\dfrac{\sqrt{6}}{8}$. ● Докажите, что $MN\perp PQ$.

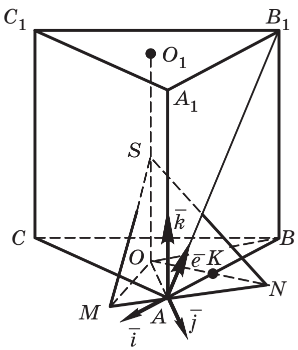


Рис. 63

17. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$. ▲ В правильном тетраэдре известны все угловые размеры; в частности, если α — величина двугранного угла, образованного боковой гранью и плоскостью основания, то $\sin\alpha=2\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма (рис. 63). Имеем $AB=3$, $AA_1=4\sqrt{3}$, MSN — боковая грань правильного тетраэдра, $AB_1\in MSN$.

Положим $\angle NOB=\varphi$, введем прямоугольный базис $(\overline{i};\ \overline{j};\ \overline{k})$ с началом в точке A так, что $\overline{i}\uparrow\uparrow BA$; $\overline{k}\uparrow\uparrow AA_1$; $\overline{j}\uparrow\uparrow ABB_1$. Обозначим через $\overline{e}$ и $\overline{n}$ следующие орты: $\overline{e}\uparrow\uparrow AB_1$ и $\overline{n}\uparrow\uparrow MSN$. Орты $\overline{e}$ и $\overline{n}$ можно представить в базисе $(\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k})$ так:

$$\overline{e}=-\sqrt{\frac{3}{19}}\,\overline{i}+\frac{4}{\sqrt{19}}\,\overline{k},\ \overline{n}=(\overline{i}\sin\varphi+\overline{j}\cos\varphi)\sin\alpha+\overline{k}\cos\alpha.$$

По условию $AB_1 \in MSN \Rightarrow \bar{n}\ \bar{e}\ = \frac{4}{3\sqrt{19}} - \frac{\sqrt{3}}{19}\ \frac{2}{\sqrt{3}}\ \sin\varphi = 0$. Отсюда следует, что $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Из треугольников OBK и AKN находим длину отрезка ON, а из треугольника OSN — длину ребра тетраэдра SN.

18. $\frac{a}{\sqrt{2}}$; $\frac{a}{2\sqrt{6}}$. **19.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **20.** $2k^3\ \frac{\sqrt{3}}{27}\ \sin^2\alpha\cos\alpha$. **21.** $\frac{\sqrt{3}\,l^3\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}$.

22. $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3(4\ \operatorname{tg}^2\alpha + 1)^{\frac{3}{2}}\ \operatorname{ctg}^2\alpha$. **23.** $6\sqrt[6]{3}\ \sqrt{V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}\ \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **24.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{24}$; $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{8}$, $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. ● Рассмотрите два случая: 1) ортогональная проекция вершины на плоскость основания пирамиды совпадает с центром вписанного в правильный треугольник круга; 2) ортогональная проекция вершины на плоскость основания пирамиды совпадает с центром окружности, которая касается одной из сторон правильного треугольника и продолжений двух других сторон этого треугольника.

25. $\frac{a(a^2-b^2)}{24}\ \operatorname{tg}\alpha$; $\frac{a(a^2-b^2)}{8}\ \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. ● Воспользуйтесь тем, что $V_{AB_1C_1CB} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{AA_1B_1C_1}$. Объем $V_{ABCA_1B_1C_1}$ данной усеченной пирамиды вычислите как разность объемов пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ и используйте указание к предыдущей задаче.

26. $\frac{\sqrt{3}}{4}\ (1 + 2\ \operatorname{tg}\varphi)\ a^2$; $\frac{\sqrt{3}}{4}(\operatorname{tg}\varphi + \sec\varphi + 1)\ a^2$, $\varphi \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

27. $\frac{1}{7}$.

28. $\arccos\frac{7}{15}$. ● Докажите, что длина бокового ребра пирамиды вдвое больше длины стороны основания.

29. б) $\arccos\frac{1-3\cos^2\varphi}{2}$. ▲ Обозначим величину плоского угла, прилежащего к основанию боковой грани, через α, а величину искомого угла — через ψ. Согласно теореме косинусов для трехгранного угла, образованного смежными боковыми гранями и основанием, получаем два равенства

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\varphi, \\ \cos\dfrac{\pi}{3} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\psi, \end{cases}$$

из которых следует $\cos\psi = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\cos^2\varphi$.

30. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}h^3(3\operatorname{tg}^2\varphi - 1),\ \varphi \in \left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

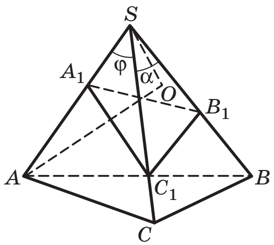


Рис. 64

31. $\dfrac{25}{2}$. ▲ Пусть $AO \perp BSC$, $\angle ASO = \varphi$, $\angle BSC = \alpha$ (рис. 64), тогда $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\ CS\cdot BS\sin\alpha\cdot AS\sin\varphi$,

$V_{SA_1B_1C_1} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\ C_1S\cdot B_1S\ \sin\alpha\ \times$ $\times A_1S\sin\varphi$. Отсюда следует, что $V_{SA_1B_1C_1} : V_{SABC} = (A_1S\cdot B_1S\cdot C_1S) :$ $: (AS\cdot BS\cdot CS)$. Подставляя числовые значения, получаем

$$\frac{V_{SABC} - V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{(1+2)(1+2)(2+1) - 1\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 1\cdot 2} = \frac{25}{2}.$$

32. $\dfrac{\pi}{2}$. ● Воспользуйтесь решением задачи 31.

33. $2a^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; $\dfrac{a^3}{3}\sin 2\alpha\cos\alpha$. **34.** 1.

35. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}},\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$. **36.** $\dfrac{4l^3\sin^2\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}{3(1+\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}},\ \beta\in(0;\ \pi)$.

37. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{6}a^3$. **38.** $6\sqrt[3]{\dfrac{ak^2}{6}\dfrac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}},\ 6\left(\sqrt[3]{\dfrac{ak^2}{6}\dfrac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin|\alpha-\gamma|}}\right)^2,\ \alpha\neq\gamma$.

39. 26 м^2. **40.** $\operatorname{arctg}\dfrac{m^2-1}{2m}$. **41.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}$.

42. $\arccos\sqrt{-\cos\alpha},\ \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$. ● Используйте теорему косинусов для трехгранного угла. **43.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

44. $\frac{32}{7}$. ▲ Точки A, B, C и D лежат на окружности (радиуса $r = AH$), в которой данная сфера (радиуса $OA = OT = OK = 4$) с центром O пересекает сферу (радиуса $AS = BS = CS = DS = 8$) с центром S (рис. 65). Пусть $ST = x$, $OH = y$. Так как произведение длины секущей, проведенной из точки вне сферы, на длину ее внешней части постоянно и не зависит от секущей, то

$SA \cdot SA_1 = SK \cdot ST$, т. е. $8 \cdot 6 = (x + 8) \cdot x$; следовательно, $x = 4$ (так как $x > 0$). Тогда $SO = SA = 8$, и точка H лежит <u>между</u> точками S и O. Из прямоугольных треугольников AHO и AHS имеем $AH^2 = OA^2 - OH^2 = SA^2 - SH^2 = SA^2 - (SO - OH)^2$, или

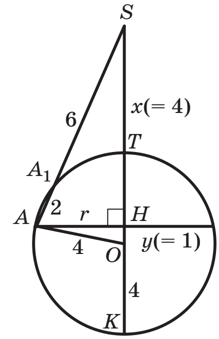


Рис. 65

$r^2 = 16 - y^2 = 64 - (8 - y)^2$, откуда $y = 1$; тогда $r^2 = 16 - 1 = 15$, $SH = 8 - 1 = 7$.

Пусть P — центр шара (рис. 66), описанного около пирамиды $SABCD$ ($PA = PS = R$). Поскольку $PH = SH - PS = 7 - R$, из прямоугольного треугольника APH получаем $PA^2 = PH^2 + AH^2$, или $R^2 = (7 - R)^2 + 15$; следовательно, $R = \frac{32}{7}$.

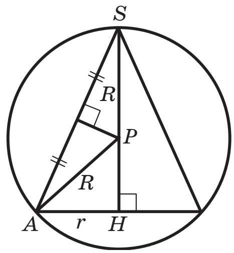


Рис. 66

45. $\frac{36}{7}$. **46.** $\frac{27}{5}$. **47.** $\frac{61 - \sqrt{61}}{120}$.

48. $\frac{\sqrt{3}}{8}h^3$. ▲ Пусть P — центр вписанной в пирамиду $DABC$ сферы радиуса r, а DK — апофема боковой грани ABD (рис. 67). Положим $\angle DKP = \angle OKP = \alpha$, тогда

$$KO = DO \cdot \operatorname{ctg} \angle DKO = h \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$r = PO = KO \cdot \operatorname{tg} \angle OKP = h \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

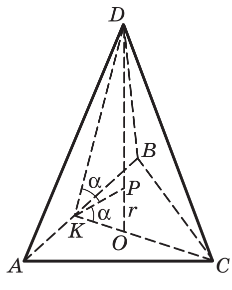


Рис. 67

Пусть T — центр описанной около пирамиды $DABC$ сферы радиуса R (точка T является точкой пересечения луча DO с сере-

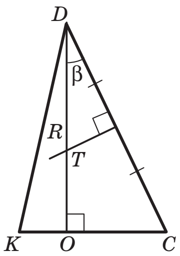


Рис. 68

динным перпендикуляром к DC), т. е. $DT = R$ (рис. 68). Полагая $\angle CDT = \beta$, имеем $CO = 2KO + 2h \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$, $CD = \sqrt{DO^2 + CO^2} = h\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2 2\alpha}$, $\cos\beta = \dfrac{DO}{CD} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}$,

$$R = \frac{\frac{1}{2}CD}{\cos\beta} = \frac{h(1 + 4\operatorname{ctg}^2 2\alpha)}{2}.$$

По условию $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{3}$, или $\dfrac{2\operatorname{ctg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 + 4\operatorname{ctg}^2 2\alpha} = \dfrac{1}{3}$. Последовательно преобразуя это соотношение, получаем

$$6 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 + 4 \operatorname{ctg}^2 2\alpha,$$

$$6 \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 + 4 \cdot \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha},$$

$$\frac{3\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha},$$

$6(1 - \cos 2\alpha)\cos 2\alpha = (1 - \cos^2 2\alpha) + 4\cos^2 2\alpha$, откуда находим $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{3}$, т. е. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогда $KO = h \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{h}{2\sqrt{2}}$, $AB = 2\sqrt{3} \cdot KO = \dfrac{h\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $S_{\Delta ABC} = AB^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} h^2$. Поэтому искомый объем $V_{DABC} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} h \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{8} h^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{8} h^3$.

49. $\dfrac{\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} - 1)}{3}$. **50.** $\sqrt{3}a^2$. **51.** $4(\sqrt{2} - 1)p^2$.

52. $\dfrac{7\sqrt{105}}{9}$. ▲ Пусть $AO = BO$, $PO = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$ — высота пирамиды $PABC$, $AB = BC = AC = 8$ (рис. 69), тогда $CO \perp AB$, при этом $CO = AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

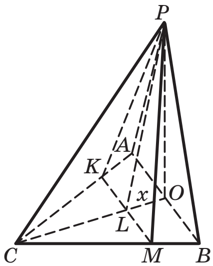


Рис. 69

Пусть PKM — сечение пирамиды ($KM \parallel AB$), $L = CO \cap KM$, тогда по теореме о трех перпендикулярах прямая $KM \perp LP$.

Положим $LO = x$, где $0 \leqslant x \leqslant 4\sqrt{3} = CO$, тогда $CL = 4\sqrt{3} - x$, $LP = \sqrt{LO^2 + PO^2} =$

$= \sqrt{x^2 + \frac{10}{3}}$. Из подобия треугольников KMC и ABC следует, что $\frac{KM}{AB} = \frac{CL}{CO}$, т. е $\frac{KM}{8} = \frac{4\sqrt{3} - x}{4\sqrt{3}}$, откуда $KM = \frac{2(4\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}}$. Площадь сечения PKM выразится функцией

$$S(x) = S_{\Delta PKM} = \frac{1}{2}\ KM \cdot PL = \frac{4\sqrt{3} - x}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{10}{3}}.$$

Для нахождения наибольшего возможного значения площади сечения вычислим производную $S'(x) = -\frac{2x^2 - 4x\sqrt{3} + \frac{10}{3}}{\sqrt{3x^2 + 10}} =$

$= \frac{-2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)}{\sqrt{3x^2 + 10}}$. Изменение знаков производной определим с помощью метода интервалов (рис. 70).

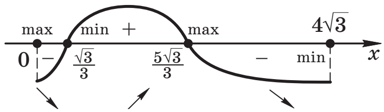


Рис. 70

Поэтому максимальное значение функции $S(x)$ на отрезке $[0;\ 4\sqrt{3}\,]$ найдем, сравнивая $S(0) = \frac{4}{3}\sqrt{30}$ и $S\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{7}{9}\sqrt{105}$:

$\frac{4}{3}\sqrt{30} \vee \frac{7}{9}\sqrt{105}$, $3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{15} \vee 7 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{15}$.

$12\sqrt{2} \vee 7\sqrt{7}$, $144 \cdot 2 \vee 49 \cdot 7$, $288 < 343$.

Следовательно, $S(0) < S\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$, т. е. $S_{\max} = S\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{7}{9}\sqrt{105}$.

53. $\frac{9}{16}$. **54.** $\frac{27\sqrt{7}}{2}$. **55.** $\frac{49}{95}$.

56. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. ▲ Нетрудно установить, что искомый результат не изменится, если к пирамиде применить преобразование подобия. Поэтому будем считать, что радиус окружности, описанной около основания ABC данной правильной треугольной пирамиды $PABC$, равен 1, а высота пирамиды $PO = h$ (рис. 71). Проведем апофему PK

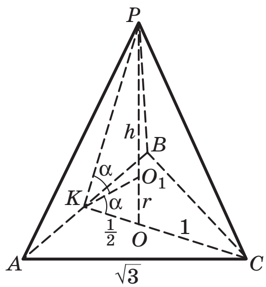


Рис. 71

боковой грани ABP и высоту CK основания пирамиды ($O \in CK$). Ясно, что $AB = BC = AC = \sqrt{3}$, $AP = BP = CP = \sqrt{h^2+1}$, $KO = \frac{1}{2}$.

Пусть O_1 — центр вписанной в пирамиду сферы радиуса r ($OO_1 = r$); положим $\angle OKO_1 = \angle PKO_1 = \alpha$.

Из прямоугольных треугольников KOO_1 и KOP имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OO_1}{KO} = 2r$, $2h = \frac{PO}{KO} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4r}{1-4r^2}$, или $4hr^2 + 2r - h = 0$, откуда $r = \frac{h}{\sqrt{1+4h^2}+1}$.

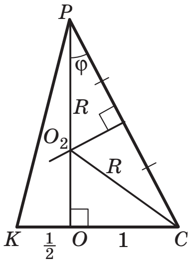


Рис. 72

Пусть O_2 — центр описанной около пирамиды сферы радиуса R ($PO_2 = CO_2 = R$), т. е. точка O_2 лежит на луче PO в плоскости, относительно которой точки P и C являются симметричными (рис. 72). Из прямоугольного треугольника POC следует, что $\cos\varphi = \cos\angle OPC = \frac{PO}{CP} = \frac{h}{\sqrt{h^2+1}}$. Тогда $R = PO_2 = \frac{\frac{1}{2}CP}{\cos\varphi} = \frac{h^2+1}{2h}$.

Запишем отношение

$$\frac{R}{r} = \frac{h^2+1}{2h} : \frac{h}{\sqrt{1+4h^2}+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{h^2}\right)\left(\sqrt{1+4h^2}+1\right)$$

и вычислим его наименьшее возможное значение. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1+4x}+1\right)$. При $x > 0$ она имеет те же экстремумы, что и отношение $\frac{R}{r}$ при $h > 0$, так как $x = h^2 > 0$. Экстремумы функции $f(x)$ найдем с помощью производной $f'(x) = \frac{2x^2-2x-1-\sqrt{1+4x}}{2x^2\cdot\sqrt{1+4x}}$.

Легко установить, что уравнение $2x^2 - 2x - 1 = \sqrt{1+4x}$ имеет единственный положительный корень: $x = 2$. Изменение знаков функции $f(x)$ и характер монотонности функции $f(x)$ изображены на рис. 73. Поэтому $f_{\min} = f(2)$ и, следовательно, отношение $\frac{R}{r}$ минимально при $h = \sqrt{2}$.

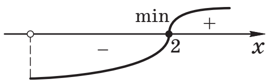


Рис. 73

Угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания есть $\angle OCP = \beta$ (рис. 74). Из прямоугольного треугольника OCP имеем $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\angle OCP = \frac{PO}{CO} = \sqrt{2}$, откуда $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

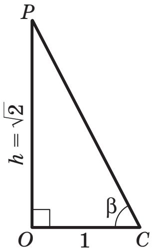


Рис. 74

57. $\frac{\pi}{4}$. **58.** $\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **59.** $\frac{5\pi}{12}$.

60. $\left\{2;\ \frac{2+\sqrt{19}}{5}\right\}$. ▲ Пусть плоскость, проходящая через точки M и L параллельно ребру AB, пересекает ребра PB и BC в точках N и Q соответственно (рис. 75) и разбивает пирамиду $PABC$ на две части, объем одной из которых, а именно той, которая содержит вершину P, обозначим через V_1.

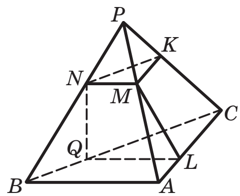


Рис. 75

Проведя плоскость $MNK \parallel ABC$ ($K \in PC$), получим, что объем V_1 равен сумме объема V_{PMNK} пирамиды $PMNK$ и объема V_{LQCMNK} усеченной пирамиды с основаниями LQC и MNK. Выразим эти объемы через объем V пирамиды $PABC$. Пирамида $PMNK$ подобна пирамиде $PABC$, поэтому $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AP} = \frac{MP}{MA+MP} = \frac{1}{3}$, так как по условию $MA : MP = 2 : 1$. Площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров, а объемы — как их кубы. Следовательно, отношение площади S_1 треугольника MNK к площади S_0 треугольника ABC равно $\frac{S_1}{S_0} = \frac{1}{9}$, а отношение объемов этих пирамид равно $\frac{1}{27}$. Кроме того, высота пирамиды $PMNK$ составляет $\frac{1}{3}$ высоты H пирамиды $PABC$ и, значит, высота h усеченной пирамиды $LQCMNK$ равна $\frac{2H}{3}$.

Далее, так как $LQ \parallel AB$, то $\Delta LQC \sim \Delta ABC$. Обозначив через k коэффициент подобия этих треугольнов, в частности положив $k = \frac{LC}{AC}$, получим, что отношение площадей этих треугольников есть $\frac{S_2}{S_0} = k^2$. Согласно формуле объема усеченной пирамиды, имеем $V_{LQCMNK} = \frac{1}{3}\, h\,(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$.

Подставляя $h = \frac{2H}{3}$, $S_1 = \frac{S_0}{9}$, $S_2 = k^2 S_0$ и учитывая, что $V = \frac{1}{3}\, HS_0$, находим

$V_{LQCMNK} = \frac{2}{27}(9k^2 + 3k + 1)V$; так как $V_{PMNK} = \frac{1}{27}V$, то $V_1 = \frac{6k^2+2k+1}{9}\, V$.

Рассмотрим отношение объемов частей пирамиды $PABC$: $\alpha = \frac{V - V_1}{V}$.

Тогда $V_1 = \frac{1}{1+\alpha}V$, откуда получаем квадратное уравнение относительно k: $6k^2 + 2k + 1 - \frac{9}{1+\alpha} = 0$.

Согласно условию, отношение α равно либо $\frac{4}{5}$, либо $\frac{5}{4}$. Решая для каждого из этих значений полученное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, соответственно находим $k = 2$ и $k = \frac{\sqrt{19}-1}{6}$. Остается заметить, что искомое отношение равно $\frac{LC}{LA} = \frac{LC}{AC - LC} = \frac{k}{1-k}$ и, следовательно, $\frac{LC}{AC} = 2$ или $\frac{LC}{AC} = \frac{\sqrt{19}+2}{5}$.

61. $\frac{7}{17}$. **62.** $\frac{a^2 \sin\psi \sin(\gamma \pm \psi)}{4\sqrt{3}\sin^2\gamma \sin^2\frac{\alpha}{2}}$ при $\gamma \in \left[\varphi;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $\alpha \in \left(0;\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $\frac{a^2 \sin\varphi \sin(\gamma - \psi)}{4\sqrt{3}\sin^2\gamma \sin^2\frac{\alpha}{2}}$ при $\gamma \in (\psi;\ \varphi)$, $\alpha \in \left(0;\ \frac{2\pi}{3}\right)$; 0 — в остальных случаях; здесь $\varphi = \arccos \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$, $\psi = \arccos \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$. ● При решении учтите, что $\gamma \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

63. $\left\{ \frac{3\sqrt{3}}{4}\ k^2\cos^2\gamma;\ \frac{\sqrt{3}}{4}\ k^2\cos\gamma;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ k^2\cos\gamma\ \sqrt{1+3\cos^2\gamma}\right.$, где

$\left.\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}}\right\}$. ● При решении учтите, что у любой треугольной пирамиды существует 7 плоскостей. равноудаленных от ее вершин.

64. $\left\{ \frac{l^2\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta};\ \frac{3l^2\cos\beta}{4(1+\cos^2\beta)} \right\}$. **65.** $a^2\ (1-\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin\alpha$, $\alpha \in$

$\in \left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$. ● Определите длины диагоналей d_1 и d_2 сечения и вычислите площадь сечения S по формуле $S = \frac{d_1 d_2}{2}$. **66.** $\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}$.

67. $\frac{H}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{9}R^2H$. **68.** $\frac{\pi}{4}$.

69. $\frac{\pi}{6}$. ▲ Пусть ΔABC — основание пирамиды, D — ее вершина, O — центр основания, E — середина стороны BC (рис. 76). Тогда $\varphi = \angle OAD$ — искомый угол.

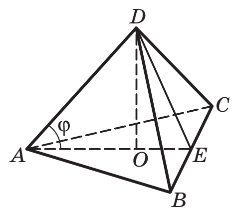


Рис. 76

Обозначим сторону основания пирамиды через α, тогда величина OA равна радиусу описанной около ΔABC окружности, т. е. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Величина AE, как высота основания, равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника DOA находим высоту пирамиды: $DO = OA\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\operatorname{tg}\varphi}{4}$. Далее найдем площадь сечения: $S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}\ DO\cdot AE = \frac{a^2\operatorname{tg}\varphi}{4}$ и площадь основания пирамиды: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. По условию $S_{\Delta ADE} : S_{\Delta ABC} = 1:3$, откуда получаем $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Итак, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

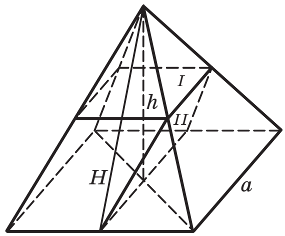


Рис. 77

70. $\frac{\pi}{4}$. **71.** $\frac{\pi}{3}$. **72.** $\frac{\pi}{3}$.

73. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$, $V = \frac{a^3\sqrt{7}}{2}$. ▲ Возможны два случая расположения секущей плоскости (рис. 77): параллельно плоскости основания (I случай) и параллельно плоскости одной из боковых граней (II случай).

По условию длина стороны основания пирамиды равна a. Обозначим длину высоты пирамиды через h, а длину апофемы — через H. Обозначим также площадь основания через S_0, а площадь одной из четырех боковых граней через $S_{\text{бок}}$. Ясно, что $h = \sqrt{H^2 - \frac{a^2}{4}}$, $S_0 = a^2$, $S_{\text{бок}} = \frac{aH}{2}$.

Так как $H > \frac{a}{4}$, то $0 < S_0 < 4S_{\text{бок}}$. Любой треугольник своей средней линией делится на две части, площади которых относятся как 3 : 1; поэтому имеем

$$\text{в I случае } \frac{S_0 + 4 \cdot \frac{3S_{\text{бок}}}{4}}{4 \cdot \frac{S_{\text{бок}}}{4}} = \frac{S_0 + 3S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}}} \in (3;\ 7);$$

$$\text{во II случае } \frac{S_{\text{бок}} + 2 \cdot \frac{3S_{\text{бок}}}{4} + \frac{S_0}{2}}{2 \cdot \frac{S_{\text{бок}}}{4} + \frac{3S_{\text{бок}}}{4} + \frac{S_0}{2}} = \frac{2S_0 + 11S_{\text{бок}}}{2S_0 + 5S_{\text{бок}}} \in \left(\frac{19}{13};\ \frac{11}{5}\right).$$

Согласно условию, I случай возможен при отношении, равном 5, а II случай — при отношении, равном 2.

В I случае имеем $\frac{S_0 + 3S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}}} = 5$, $S_0 = \text{S}_{\text{бок}}$, т. е. $H = a$.

Следовательно, $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и искомый объем $V = \frac{a^2h}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Во II случае имеем $\dfrac{2S_0 + 11S_{\text{бок}}}{2S_0 + 5S_{\text{бок}}} = 2$, $S_{\text{бок}} = 2S_0$, т. е. $H = 4a$.

Следовательно, $h = \sqrt{16a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{2}$ и $V = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{2}$.

74. $V = \dfrac{12\sqrt{7}b^3}{125}$, $V = \dfrac{4\sqrt{7}b^3}{65\sqrt{65}}$. **75.** $V = \dfrac{12h^3}{7}$, $V = \dfrac{4h^3}{21}$.

76. $V = \dfrac{H^3\sqrt{15}}{48}$, $V = \dfrac{3\sqrt{7}H^3}{16}$.

77. 150. ▲ Используя теорему Пифагора, находим гипотенузу AC (рис. 78):

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25 + 144} = 13.$$

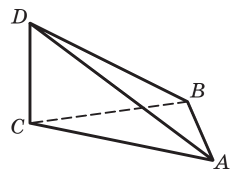


Рис. 78

Площадь боковой поверхности пирамиды выразится так:

$$S_{\text{бок}} = S_{\Delta DCB} + S_{\Delta DBA} + S_{\Delta DCA}.$$

Так как $DB \perp AB$, то $S_{\Delta DBA} = \dfrac{1}{2} \times DB \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{DC^2 + BC^2} \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{81 + 144} \cdot 5 = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 = \dfrac{75}{2}$; аналогично

$$S_{\Delta DCB} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54;$$

$$S_{\Delta DCA} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 13 = \frac{117}{2}.$$

Итак, $S_{\text{бок}} = \dfrac{75}{2} + 54 + \dfrac{117}{2} = 150.$

78. $100\sqrt{3} + 180$. **79.** $\dfrac{405 + 27\sqrt{41}}{2}$.

80. $200 + 100\sqrt{3}$. **81.** $S_{\text{бок}} = \dfrac{\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{L^2 - \dfrac{12L\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}} + 9S_0\sqrt{3}}$, если $L > 2\sqrt{S_0}\sqrt[4]{3}\,(\sqrt{3} + 1)$. При $L = 10$ и $S_0 = \sqrt{3}$ площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = \sqrt{7}$. ▲ Обозначим (см. рис. 79)

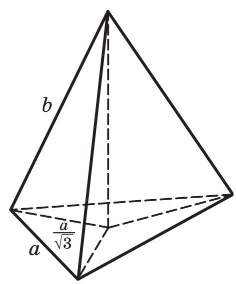


Рис. 79

сторону основания пирамиды через a, а боковое ребро — через b. Согласно условию, имеем систему

$$\begin{cases} S_0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, \\ \dfrac{L}{3} = a + b. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что $a = \dfrac{2\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}}$. Подставляя это значение a во второе уравнение системы, находим $b = \dfrac{L}{3} - \dfrac{2\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}}$. Поэтому искомая площадь $S_{\text{бок}} = \dfrac{3}{2}\,a\,\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}} =$
$= \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\left(\dfrac{L}{3} - \dfrac{2\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}}\right)^2 - \dfrac{S_0}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{L^2 - \dfrac{12L\sqrt{S_0}}{\sqrt[4]{3}} + 9S_0\sqrt{3}}$.

При этом естественное ограничение $b > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ переходит в неравенство $L > 2\sqrt{S_0}\sqrt[4]{3}\,(\sqrt{3} + 1)$, выполняющееся при заданных L и S_0. **82.** $S_{\text{полн}} = 3r\sqrt{3}\,(r + \sqrt{b^2 - 3r^2})$, если $b > 2r$. При $r = 1$ и $b = \sqrt{7}$ площадь полной поверхности $S_{\text{полн}} = 9\sqrt{3}$. **83.** $V = r^2\sqrt{\dfrac{L^2}{3} - 4Lr\sqrt{3} + 24R^2}$, если $L > 6r(\sqrt{3} + 1)$. При $r = \sqrt{3}$ и $L = 36$ объем $V = 18\sqrt{2}$. **84.** $V = \dfrac{R}{12}\sqrt{2S(2S - 3\sqrt{3}R^2)}$, если $S > \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. При $R = 2$ и $S = 9\sqrt{3}$ объем $V = 3$.

§ 2. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

1. $\dfrac{a^3}{8\pi}\sin 2\alpha\cos\alpha$. **2.** $\dfrac{\pi b^3}{8}\,\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **3.** $\dfrac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{3\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\dfrac{S\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

4. $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{27}a^3$. **5.** $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$. **6.** $\dfrac{\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta}$. **7.** $\dfrac{\pi a^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha + \beta)}$.

8. $\frac{\pi b^3}{12}(\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta)$. **9.** $\frac{\pi a^3 \sin^2\alpha \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. **10.** $\frac{3\pi}{10}$. **11.** $\frac{\pi}{5}$.

12. а) 5π. ▲ $V = \pi \int\limits_0^3 (||x-1|-2|)^2\, dx = \pi \int\limits_0^1 (-x+1-2)^2\, dx + \pi \int\limits_1^3 (x - 1 - 2)^2\, dx = \left.\frac{\pi(x+1)^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{\pi(x-3)^3}{3}\right|_1^3 = 5\pi$. При вычислениях мы использовали соотношения

$$|f(x)|^2 = (f(x))^2 \text{ и } |x-1|-2 = \begin{cases} -x-1, \ x \in (-\infty; 1), \\ x-3, \ x \in [1; +\infty); \end{cases}$$

б) $\frac{32\pi}{3}$. ▲ Объем V найдем с учетом того, что $|x-1| - |x+1| = \begin{cases} 2, \ x \in (-\infty; -1), \\ -2x, \ x \in [-1; 1), \\ -2, \ x \in [1; +\infty). \end{cases}$ Значит, $V = \pi \int\limits_{-2}^{2} (|x-1| - |x+1|)^2 dx = \pi \int\limits_{-2}^{-1} 4dx + \pi \int\limits_{-1}^{1} 4x^2 dx + \pi \int\limits_{1}^{2} 4dx$;

в) $\frac{18\pi}{5}$; г) $2{,}1\pi$; д) 8π.

13. Диагональ квадрата перпендикулярна оси вращения. ● Обозначив длину стороны квадрата через a, а величину угла, образованного одной из сторон квадрата с осью вращения, — через α, покажите, что объем получающегося тела вращения равен $\pi a^3(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

14. $\frac{H}{3}$; $\frac{4\pi R^2 H}{27}$. ● Найдите наибольшее значение функции $V(x) = \pi R^2 x\left(\frac{H-x}{H}\right)^2$ на отрезке $x \in [0; H]$ (x — длина высоты цилиндра).

15. $\frac{2\sqrt{2R}}{3}$; $\frac{4R}{3}$. ● Найдите значение h, $h \in [0; 2R]$, при которых функция $V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h)$ принимает наибольшее значение на указанном отрезке; воспользуйтесь формулой $r^2 = h\,(2R - h)$.

16. Конус с радиусом основания, равным $R\sqrt{2}$, и высотой, равной $4R$. ▲ Пусть r, H, φ — радиус основания конуса, длина его высоты и угол наклона образующей к плоскости основания соответственно. Имеем

$$r = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},\ H = r \operatorname{tg} \varphi = R \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi;\ V(\varphi) = \frac{\pi R^3}{3} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2},$$

$\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Введем новую переменную $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ и продифференцируем полученную функцию, тогда

$$V(t) = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{(1-t^2)t^2},\ t \in (0; 1),$$

$$V'(t) = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{2(2t^2-1)}{(1-t^2)^2 t^3}.$$

В точке $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $V'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, на интервале $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ выполняется неравенство $V'(t) < 0$, а на интервале $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$ — неравенство $V'(t) > 0$, т. е. в точке $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ функция $V(t)$ имеет минимум, совпадающий с наименьшим значением функции на промежутке $t \in (0; 1)$. Далее находим $r = R\sqrt{2}$ и $H = R\sqrt{2}\,\dfrac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4R$.

17. $R\sqrt{3}$. **18.** $\frac{4}{3} R$; $\frac{64}{81} R^3$.

§ 3. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

1. $\dfrac{4V}{\sqrt{3}(4W\operatorname{ctg}\alpha)^{\frac{2}{3}}}$. **2.** $\dfrac{a^3(2+\operatorname{tg}\alpha)^3\operatorname{ctg}^2\alpha}{6}$.

3. При $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \neq \beta$ два решения: $\dfrac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\dfrac{V}{\sin|\alpha-\beta|}$; при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha = \beta$ одно решение: $\dfrac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$;

здесь $V = \frac{4a^3}{75} \sin^2\varphi \cos\varphi \sin\beta$. **4.** $\frac{32r^3\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}$. **5.** $\frac{\pi l^2\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$.

6. $\frac{\pi l^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{9}\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}$. **7.** $\frac{\pi r^2}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}$. **8.** $\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\alpha \operatorname{tg}\varphi$. **9.** $2\arcsin \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. **10.** $\frac{ab(\sqrt{4a^2b^2+c^2(a^2+b^2)} \pm 2ab)}{c(a^2+b^2)}$.

11. $\frac{3h}{4\cos\alpha+2}$, $\alpha \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$. ▲ Поскольку пирамида $SABC$ (рис. 80) — правильная, центр описанной около нее сферы лежит на прямой SO($SO = h$), лежащей в плоскости ASS_1 (S_1 — точка пересечения прямой SO со сферой). Соединив точку A с S_1 отрезком, получим прямоугольный треугольник SAS_1 $\left(A = \frac{\pi}{2}\right.$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр $\left.SS_1\right)$.

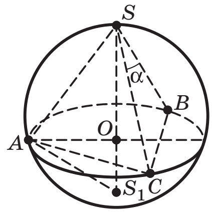


Рис. 80

Пусть $SS_1 = 2R$, $BC = x$; тогда $AO = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и из пропорции $\frac{OS_1}{AO} = \frac{AO}{OS}$ следует, что $\frac{x^2}{3} = h(2R - h)$. Так как ΔAOS — прямоугольный, то $AS^2 = \frac{x^2}{3} + h^2$. Далее,

$$AS^2 + SC^2 - 2AS \cdot SC\cos\alpha = x^2$$

и с учетом того, что $AS = SC$, имеем $AS^2 = \frac{x^2}{2}(1 - \cos\alpha)$, или $\frac{x^2}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{x^2}{3} + h^2$, откуда $\frac{x^2}{3} = \frac{2h^2(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha}$. Решив теперь уравнение $\frac{2h^2(1-\cos\alpha)}{1+2\cos\alpha} = h(2R - h)$, получим ответ.

12. $\frac{\sqrt{h^2\cos^2\alpha + a^2}}{2\cos\alpha}$. ● Центром описанной сферы является точка пересечения плоскости. перпендикулярной высоте пирамиды и проходящей через ее середину, с прямой, перпендикулярной плоскости основания пирамиды и проходящей через середину гипотенузы треугольника, лежащего в основании пирамиды.

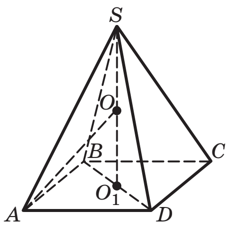


Рис. 81

13. $\dfrac{4\pi a^3}{9\sqrt{3}\sin^3 2\alpha}$. **14.** $\dfrac{4}{3}\ R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi\times$ $\times\sin\alpha,\ \varphi\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. **15.** $\sqrt[3]{\dfrac{6V}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. **16.** $\left\{\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \dfrac{\pi}{4}\right\}$.

17. $\left\{\arccos\dfrac{309}{325};\ \arccos\dfrac{3}{13}\right\}$. ▲ Так как боковые ребра пирамиды $SABCD$ составляют с плоскостью основания равные углы (рис. 81), то ортогональная проекция O_1 вершины пирамиды S на плоскость основания $ABCD$ есть центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. Сечением описанной сферы плоскостью основания пирамиды $ABCD$ является окружность, описанная около прямоугольника $ABCD$. Следовательно, центр O описанной сферы принадлежит прямой SO_1. Треугольник ASC — равнобедренный, так как $\angle SAC = \angle SCA$. Сторона основания AC этого треугольника есть в то же время диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = 5$. Поскольку центр сферы, описанной около пирамиды, принадлежит плоскости ASC, радиус R окружности, описанной около треугольника ASC, равен 6,5. Из прямоугольного треугольника AOO_1 имеем $|SO_1-R|^2 = R^2-\dfrac{AC^2}{4}$, откуда $SO_1 = R\ \pm$ $\pm\sqrt{R^2-\dfrac{AC^2}{4}} = 6{,}5\pm 6$.

Если центр описанной сферы O принадлежит пирамиде $SABCD$, то перед корнем следует брать знак «плюс». Длина бокового ребра определяется из прямоугольного треугольника AO_1S: $AS=\sqrt{SO_1^2+AO_1^2} = \sqrt{162,5}$. Из треугольника BSC по теореме косинусов находим $\cos\angle BSC = \dfrac{BS^2+CS^2-BC^2}{2BS\cdot CS} = \dfrac{309}{325}$, $\angle BSC = \arccos\dfrac{309}{325}$.

Если же центр сферы O не принадлежит пирамиде $SABCD$, то перед корнем следует брать знак «минус», тогда $\angle BSC =$ $=\pi-\arccos\left(-\dfrac{3}{13}\right) = \arccos\dfrac{3}{13}$.

18. $\dfrac{b\sin\alpha}{2\left(1+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. ▲ Пусть точка O — центр шара, вписанного в пирамиду $SABC$ (рис. 82), у которой $AC = AB = b$, $SA \perp ABC$, ALS — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного боковыми гранями ASC и ASB.

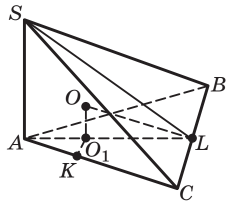


Рис. 82

По условию $\angle BAC = \angle ALS = \alpha$. Точка $O \in (ALS)$ и OL — биссектриса $\angle ALS$. Пусть O_1 — проекция точки O на плоскость основания; тогда точка O_1 принадлежит биссектрисе AL угла CAB, а проекцией вписанного шара на плоскость основания является большой круг шара с центром в точке O_1, касающийся сторон AB и AC треугольника ABC. Обозначив точку касания этого круга со стороной AC через K, имеем $O_1K = OO_1 = r$, где r — радиус вписанного шара.

Из прямоугольного треугольника OO_1L находим $O_1L = r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Далее имеем $AO_1 = AL - O_1L = b\cos\dfrac{\alpha}{2} - r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKO_1 следует уравнение $O_1K = r = AO_1\sin\dfrac{\alpha}{2} = b\cos\dfrac{\alpha}{2} - r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$, решая которое относительно r, получим ответ. **19.** $\dfrac{hr}{\sqrt{r^2+4h^2}} \pm r$. ● Рассмотрите два случая расположения центра шара относительно плоскости основания пирамиды. **20.** $\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{6}};\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$. ● При решении учтите, что существует пять сфер, касающихся всех плоскостей граней любой треугольной пирамиды: сфера, вписанная в пирамиду, и четыре сферы, каждая из которых касается одной из граней пирамиды и продолжений трех других ее граней. **21.** $\dfrac{\pi a^3}{6}\sin^3\alpha\operatorname{tg}^3\dfrac{\varphi}{2}$. ● Найдите объем V пирамиды, площадь S полной поверхности пирамиды и из уравнения $V = \dfrac{1}{3}rS$ определите радиус вписанного шара. **22.** $\dfrac{\pi a^2\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$, $a \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. ● Для нахождения радиуса шара r воспользуйтесь формулой $r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, φ — величина угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

23. $\dfrac{S\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\pi\cos\beta}$. **24.** $\left\{\dfrac{4R^3}{3}\dfrac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2};\ \dfrac{4R^3}{3}\dfrac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\right\}$.

● Рассмотрите два случая: 1) сфера вписана в пирамиду; 2) сфера касается основания пирамиды и продолжений боковых граней. **25.** $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. **26.** $\frac{a\sqrt{\cos 2\beta}}{2\sin\beta+\sqrt{2}}$. **27.** $-\frac{\pi R^3}{3}\operatorname{tg}^3\alpha\times$ $\times\operatorname{tg}2\alpha$. **28.** $r\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\gamma}{2}\right)$. **29.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}$. **30.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

31. $a+\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}$. **32.** $q^2\frac{2-q}{4}$, $q\in(0;\ 2)$. **33.** $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}$.

34. $\left\{\frac{1183\pi R^3}{12\,000};\ \frac{637\pi R^3}{12\,000}\right\}$. ▲ Пусть правильная треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу радиуса R с центром O. При этом вершины пирамиды принадлежат сфере, а высота пирамиды DO_1, где O_1 — центр правильного треугольника ABC, принадлежит диаметру данного шара. Отметим, что рассматриваемая фигура имеет плоскость симметрии DAD_1, где D_1 — точка пересечения DO_1 со сферой. Имеем $OD = OA = R$. По условию $OO_1 = 0{,}3R$, $D_1O_1 = 0{,}7R$. Из подобия прямоугольных треугольников AD_1O_1 и ADO_1 находим $AO_1^2 = D_1O_1\cdot DO_1 =$ $= 1{,}3R\cdot 0{,}7R = 0{,}91R^2$. Длина отрезка O_1A является радиусом описанного около ΔABC круга; тогда радиус r вписанного круга можно найти по формуле $r = \frac{1}{2}AO_1$. Вычислим объем V_1 конуса, вписанного в пирамиду: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot DO_1 =$ $= 1183\pi\frac{R^3}{12\,000}$.

Условиям задачи удовлетворяет и пирамида с вершиной в точке D_1. В этом случае объем V_2 конуса равен $637\pi\frac{R^3}{12\,000}$.

35. $\left\{\pi R^3\ \frac{4-\sqrt{7}}{2};\ \frac{\pi R^3(12-3\sqrt{15})}{2}\right\}$. **36.** $2r^2 \sin\beta$. **37.** $\arccos \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

● Покажите, что длина диагонали квадрата, получающегося в сечении призмы, равна длине большей диагонали ромба. **38.** $\frac{4r^2}{\sin\alpha\cos\beta}$. ● Докажите, что площадь сечения призмы $S_{\text{сеч}}$ и площадь S трапеции, лежащей в основании призмы, связаны соотношением $S_{\text{сеч}} \cos\beta = S$. **39.** $3a^2\ \frac{\sqrt{2}}{5}$. ▲ Введем прямоугольный базис $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ с началом в точке A так, как показано на рис. 83. Пусть $\angle C_1AC = \alpha$; рассмотрим орт $\bar{n}$, перпендикулярный плоскости сечения $AB_1C_1D_1$. По условию $\angle(\bar{n},\ \bar{j}) = 120°$, а вектор $\bar{n}$ можно представить в базисе $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ следующим образом: $\bar{n} = -\sin\alpha\cos 45° \cdot \bar{i} - \sin\alpha\cos 45° \cdot \bar{j} + \cos\alpha \cdot \bar{k}$.

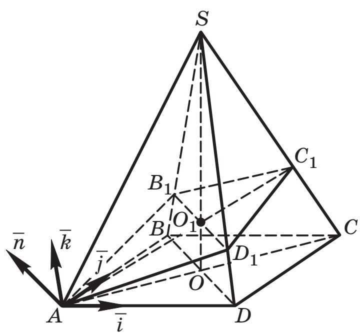


Рис. 83

Далее имеем $\bar{n}\bar{j} = \cos\angle(\bar{n},\ \bar{j}) = -\frac{1}{2} = -\sin\alpha\cos 45° \Rightarrow \alpha = 45°$. Из треугольников ASB и AC_1C после несложных вычислений находим: $AC_1 = 8\frac{a}{5}$, $AO = OO_1 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $SO_1 = 3a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Из подобия треугольнков SBD и SB_1D_1 найдем $B_1D_1 = 3a\ \frac{\sqrt{2}}{4}$. Наконец, $S = \frac{1}{2}AC_1 \cdot B_1D_1$, откуда получаем ответ.

40. Если ортогональная проекция сечения принадлежит меньшей из двух частей основания пирамиды, на которые секущая плоскость делит это основание, то

$$S = \frac{a^2 \sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left(2 + \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right),\ \beta \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Если ортогональная проекция сечения принадлежит большей части основания пирамиды, то

$$S = \frac{2a^2 \sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left(1 + \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right),\ \beta \in [0;\ \mathrm{arctg}\,(3\,\mathrm{tg}\,\alpha)],$$

$$S = \frac{a^2 \sin\alpha}{9\sin(\beta-a)}\left(2 - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\right),\ \beta \in \left[\mathrm{arcctg}\,(3\,\mathrm{tg}\,\alpha);\ \frac{\pi}{2}\right].$$

41. $\sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}$. ▲ Пусть x — длина стороны основания призмы, H — длина бокового ребра, тогда $V = H\,\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, или $H = \frac{4V}{\sqrt{3}x^2}$.

Запишем сумму длин всех ребер призмы: $S = 3H + 6x = 6x + 4\frac{\sqrt{3}V}{x^2}$. Таким образом, получим функцию $S\,(x) = 6x + 4\,\frac{\sqrt{3}V}{x^2}$, x $(0;\ +\infty)$; требуется определить ее наименьшее значение на указанном промежутке. Найдем критические точки функции $S(x)$. Имеем $S'(x) = 6 - 8\frac{\sqrt{3}V}{x^3} = 0$, $x = \frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt{3}}$; на промежутке $\left(0;\ \frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt{3}}\right)$ выполняется неравенство $S'(x) < 0$ ($S(x)$ убывает), на промежутке $\left(\frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt{3}};\ +\infty\right)$ — неравенство $S'(x) > 0$ ($S(x)$ возрастает). Следовательно, при $x = \frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt{3}}$ функция $S\,(x)$ имеет миниум, совпадающий с ее наименьшим значением на промежутке $(0;\ +\infty)$.

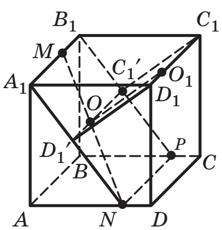


Рис. 84

42. 4. ▲ Проведем общий перпендикуляр к прямым MN и C_1D_1 (рис. 84). Для этого рассмотрим плоскость П, проходящую через прямую MN и параллельную C_1D_1. Эта плоскость пройдет через прямую A_1B_1, так как $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.
На рисунке указаны также отрезки NP, A_1N и B_1P, по которым плоскость П пе-

ресекает соответствующие грани куба. Отметим, что плоскость П перпендикулярна граням AA_1D_1D и BB_1C_1C (поскольку этим граням перпендикулярна прямая A_1B_1, через которую плоскость П проходит). Построим ортогональную проекцию ребра C_1D_1 на плоскость П. Для этого в плоскости грани BB_1C_1C из точки C_1 опустим на B_1P перпендикуляр CC_1', а в плоскости грани AA_1D_1D из точки D_1 опустим на A_1N перпендикуляр D_1D_1'. Так как плоскость П перпендикулярна указанным граням, то CC_1 и D_1D_1 будут перпендикулярны плоскости П. Таким образом, отрезок C_1D_1' является ортогональной проекцией ребра C_1D_1 на плоскость П. Само ребро C_1D_1, очевидно, параллельно плоскости П и отстоит от нее на расстояние $d = C_1C_1' = D_1D_1'$. Пусть O — точка пересечения отрезков MN и C_1D_1', O_1 — точка на ребре C_1D_1, ортогональная проекция которой на плоскость П есть точка O (так что $O_1D_1 = OD_1'$). Из построения следует, что OO_1 — общий перпендикуляр к прямым MN и C_1D_1 и что $OO_1 = d$ есть наименьшее расстояние между прямыми MN и C_1D_1, а следовательно, и между отрезками MN и $C_1D_1 : d < ST$ для любых $S \in MN$ и $T \in C_1D_1$, если только либо S не совпадает с O, либо T не совпадает с O_1. Отсюда следует, что точка O является центром шара радиуса d, касающегося ребра C_1D_1 (в точке O_1), и что любой другой шар с центром на прямой MN (в частности, на отрезке MN) и меньшего радиуса не имеет ни одной общей точки с прямой C_1D_1 (в частности, с отрезком C_1D_1).

Остается вычислить $d = D_1D_1'$. Если a — ребро куба (по условию $a = 5$), то из условия следует, что $AN = \frac{3a}{4}$. Согласно теореме Пифагора, $A_1N = \sqrt{AA_1^2 + AN^2} = \frac{5a}{4}$. Из подобия треугольников AA_1N и $D_1'D_1A$ получим $d = D_1D_1' = a \cdot \frac{a}{A_1N} = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$.

43. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ при $h \leqslant 3$; $\frac{3\sqrt{3}h^3}{h^2-3}$ при $h > 3$.

▲ Пусть $PO = x$ — высота пирамиды, T — точка касания полусферы с боковой гранью пирамиды (с апофемой PK), а значит, TO — радиус полусферы, т. е. $TO = \sqrt{3}$ (рис. 85).

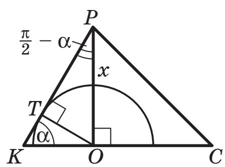


Рис. 85

Тогда $x > \sqrt{3}$ и, кроме того, $x \geqslant h$ согласно условию. Положим $\angle OKP = \alpha$. В ΔPTO имеем $\frac{TO}{PO} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{x} = \cos\alpha$; в ΔKTO имеем $KO = \frac{TO}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}} = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 - 3}}$. Так как KO — радиус окружности, вписанной в правильный треугольник ABC, то его сторона равна $AB = 2\sqrt{3} \cdot KO = \frac{6x}{\sqrt{x^2 - 3}}$. Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}x^2}{x^2 - 3}$, и объем пирамиды выражается формулой $V(x) = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot x = 3\sqrt{3} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 3}$. Наименьшее значение объема пирамиды $V_{\min}$ ищем с помощью производной $V'(x) = 3\sqrt{3} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{(x^2-3)^2}$, изменение знаков которой проведем с помощью метода интервалов (рис. 86).

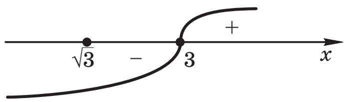


Рис. 86

Если $h \leqslant 3$, то учитывая, что $x \leqslant h$, имеем

$$V_{\min} = V(3) = 3\sqrt{3} \cdot \frac{27}{9 - 3} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Если же $h > 3$, то при $x \in [h; +\infty)$ функция $V(x)$ монотонно возрастает. Следовательно, $V_{\min} = V(h) = 3\sqrt{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - 3}$.

44. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}(16 + 13\sqrt{13} + 5\sqrt{157})$.

▲ Пусть $MK \parallel DE$ и MKP — треугольное сечение пирамиды $PABCDEF$ (рис. 87); по условию $AB = \frac{11}{\sqrt{3}}$, $PO = 3$.

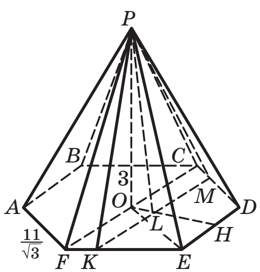


Рис. 87

Пусть $OH \perp DE$ ($EH = DH$), а $L = MK \cap OH$. Так как $OL \perp MK$, то по теореме о трех перпендикулярах $PL \perp MK$, и площадь сечения $S_{\Delta MKP} = \frac{1}{2} MK \cdot PL$.

Из ΔEHO имеем $OH = OE \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{11}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$ $= \frac{11}{2}$. Введем величину $x = OL$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{11}{2}\right)$ и выразим через x площадь сечения. Из прямоугольного трегольника POL следует, что $PL =$ $= \sqrt{OL^2 + PO^2} = \sqrt{x^2 + 9}$. Продолжим лучи CD и FE до их пересечения в точке T (рис. 88).

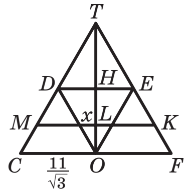


Рис. 88

Треугольники DTE, DOE, CDO, OEF — правильные со стороной $\frac{11}{\sqrt{3}}$ и высотой $\frac{11}{2}$. Так $\Delta MTK \sim \Delta CTF$, то $\frac{MK}{CF} = \frac{TL}{TO}$, т. е. $\frac{MK}{\frac{22}{\sqrt{3}}} = \frac{11 - x}{11}$, откуда $MK = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(11 - x)$. Тогда площадь сечения выразится функцией $S\,(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(11 - x)\,\sqrt{x^2 + 9}$; будем искать ее наибольшее возможное значение на отрезке $\left[0; \frac{11}{2}\right]$. Найдем производную $S'\,(x) = -\frac{(x-1)(2x-9)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+9}}$ и применим метод интервалов (рис. 89).

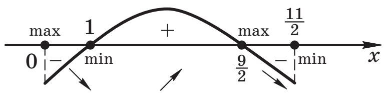


Рис. 89

Сравним максимум S (0) (на конце отрезка) с максимумом $S\left(\frac{9}{2}\right)$ (во внутренней точке отрезка): $S(0) = 11\sqrt{3}$, $S\left(\frac{9}{2}\right) =$ $= \frac{13\sqrt{39}}{4}$. Имеем $11\sqrt{3} \vee \frac{13\sqrt{39}}{4}$; $44 \vee 13\sqrt{13}$; $44^2 \vee 13^2 \cdot 13$; $1936 < 2197 \Rightarrow S(0) < S\left(\frac{9}{2}\right)$, т. е. $S_{\max} = S\left(\frac{9}{2}\right)$ и $OL = x = \frac{9}{2}$, $LH = OH - OL = 1$.

Найдем полную поверхность отсекаемой четырехугольной пирамиды $PKMDE$. Последовательно получаем $S_{KMDE} =$ $= \frac{1}{2}(MK + DE) \cdot LH = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(11 - \frac{9}{2}\right) + \frac{11}{\sqrt{3}}\right] \cdot 1 = 4\sqrt{3}$; $S_{\Delta MKP} =$

$= S\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{4}$; $KE = MD = LH : \sin\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; высоты боковых граней KEP, MDP и DEP равны друг другу и равны $PH =$ $= \sqrt{PO^2 + OH^2} = \sqrt{9 + \frac{121}{4}} = \frac{\sqrt{157}}{2}$; $S_{\Delta KEP} = \frac{1}{2}\ KE \cdot PH = \frac{\sqrt{157}}{2\sqrt{3}}$;

$S_{\Delta DEP} = \frac{1}{2} DE \cdot PH = \frac{11\sqrt{157}}{4\sqrt{3}}$.

Итак,

$S_{\text{полн}} = S_{KMDE} + S_{\Delta MKP} + 2S_{\Delta KEP} + S_{\Delta DEP} = 4\sqrt{3} + \frac{13\sqrt{39}}{4} +$ $+ \frac{\sqrt{157}}{\sqrt{3}} + \frac{11\sqrt{157}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(16 + 13\sqrt{13} + 5\sqrt{157})$. б) $30\sqrt{3}$; в) $312\sqrt{3}$.

45. $k^2 \sin 2\alpha$ при $\alpha \in \left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{k^2}{2}(1 + 3\cos^2\alpha)$ при $\alpha \in \left(0;\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right]$. ▲ При пересечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину, в сечении получается равнобедренный треугольник, площадь которого $S = \frac{1}{2} l^2 \sin\varphi$, где l — длина образующей конуса, φ — величина угла между образующими, по которым плоскость пересекает коническую поверхность. Так как длина образующей равна длине бокового ребра пирамиды, вписанной в этот конус, то площадь сечения является функцией угла φ, причем в общем случае $\varphi \in (0; \pi)$.

Наибольшим значением φ является угол γ в осевом сечении конуса, поэтому при исследовании знака производной функции $S(\varphi) = \frac{1}{2}\ l^2 \cos\varphi$ мы имеем две возможности: 1) если $\gamma \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\varphi > 0$, т. е. $S(\varphi)$ возрастает на этом промежутке и достигает наибольшего значения при $\varphi = \gamma$; в этом случае $S_{\max} = \frac{1}{2} l^2 \times$ $\times \sin\gamma$; 2) если $\gamma \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, то $\cos\varphi \leqslant 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума функции $S(\varphi)$; в этом случае $S_{\max} = \frac{l^2}{2}$.

Пусть β — величина угла между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания, h — длина ее высоты. Имеем $h \operatorname{ctg} \beta = 2h \operatorname{ctg} \alpha$ или $\operatorname{ctg} \beta = 2 \operatorname{ctg} \alpha$ и $h = k \sin \alpha$. Найдем длину образующей конуса (бокового ребра пирамиды): $l = \dfrac{h}{\sin\beta}$. Теперь находим выражение для площади сечения:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sin\beta}\right)^2 \sin\varphi = \frac{1}{2} k^2 \sin^2\alpha\,(1 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin\varphi.$$

Величина угла γ в осевом сечении конуса γ будет меньше $\dfrac{\pi}{2}$, если $\beta > \dfrac{\pi}{4}$, т. е. $2 \operatorname{ctg} \alpha < 1$ или $\alpha \in \left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$; в этом случае

$S_{\max} = \dfrac{1}{2} k^2 \sin^2\alpha \cdot 2\operatorname{ctg}\beta = 2k^2\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha = k^2 \sin 2\alpha.$

Если же $0 < \beta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, т. е. $\alpha \in \left(0; \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2}\right]$, то $S_{\max} = \dfrac{1}{2} l^2 = \dfrac{1}{2} k^2\sin^2\alpha\,(1 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha) = \dfrac{k^2}{2}(1 + 3\cos^2\alpha).$

46. $\dfrac{a\sin\alpha}{2 + \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}}$. ▲ Пусть $FABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, FK и FN — апофемы боковых граней ABF и CDF соответственно (рис. 90). По условию ребро основания $AD = a$, $\angle FKN = \alpha$. Пусть точка P — центр основания конуса (P лежит на высоте FO пирамиды), а окружность основания конуса касается апофем FK и FN в точках L и M соответственно.

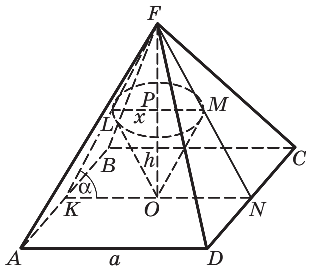


Рис. 90

Положим $x = LP$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a}{2}\right)$ и выразим через x объем конуса. Найдем высоту конуса $h = PO$. Из подобия треугольников LPF и KOF (рис. 91) следует $\dfrac{LP}{KO} = \dfrac{FP}{FO} = \dfrac{FO - PO}{FO} = 1 - \dfrac{PO}{FO}$.

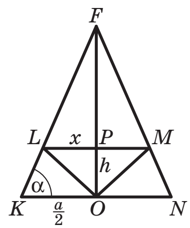


Рис. 91

Так как $LP = x$, $KO = \frac{a}{2}$, $PO = h$, $FO = \frac{a}{2}$ tg α, то $\frac{x}{\frac{a}{2}} = 1 - \frac{h}{\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha}$,

т. е. $h = \left(\frac{a}{2} - x\right)\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, объем конуса $V = V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot h = \frac{\pi \operatorname{tg}\alpha}{3} \cdot x^2\left(\frac{a}{2} - x\right)$. Максимальное значение функции $V(x)$ найдем с помощью производной $V'(x) = \frac{\pi \operatorname{tg}\alpha}{3} \cdot x(a - 3x)$, изменение знаков которой проведем методом интервалов (рис. 92).

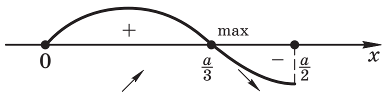


Рис. 92

Объем конуса будет максимально возможным при $x = \frac{a}{3}$, тогда $h = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{6}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}FO$. Нам надо найти радиус шара,

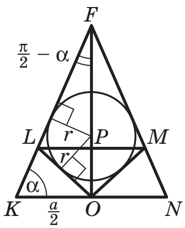


Рис. 93

касающегося боковой поверхности конуса и всех боковых граней пирамиды (апофем пирамиды). На планиметрическом чертеже (рис. 93) радиус этого шара соответствует радиусу окружности, вписанной в четырехугольник $LFMO$, у которого диагонали LM и FO взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P.

Известно, что радиус окружности, вписанной в многоугольник, равен отношению площади многоугольника к его полупериметру. Найдем площадь четырехугольника $LFMO$: $S_{LFMO} = \frac{1}{2}LM \cdot FO = LP \cdot FO = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{6}\operatorname{tg}\alpha$.

Полупериметр четырехугольника $LFMO$ равен сумме $FL + OL$, так как $FM = FL$, а $OM = OL$. Вычислив длины отрезков FL и OL, получаем

$$FL = \frac{LP}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{a}{3\cos\alpha};$$

$$OL = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{6}\operatorname{tg}\alpha\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a}{6\cos\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{LFMO}}{FL + OL} + \frac{\frac{a^2}{6}\operatorname{tg}\alpha}{\frac{a}{3\cos\alpha} + \frac{a}{6\cos\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{a\sin\alpha}{2 + \sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}} = \frac{a\sin\alpha}{2 + \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}}.$$

47. $\frac{48H^2 + a^2}{96H}$. **48.** $\frac{\sqrt{49a^4 + 72a^2H^2 + 16H^4}}{16H}$.

49. $\frac{\sqrt{3}a\sin\alpha}{3(2 + \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha})}$.

50. $\frac{7}{2}$. ▲ Пусть O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, $O_1A = O_1S = R$ — ее радиус, $SP = 4$ — высота пирамиды (рис. 94). Так как точка O_1 равноудалена от вершин пирамиды, то она лежит на прямой, перпендикулярной плоскости основания и проходящей через его центр, — точку O. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1M на прямую SP и обозначим длины сторон полученного прямоугольника OO_1MP через $x = OP = O_1M$ и $y = OO_1 = PM$. Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам O_1OA и O_1MS:

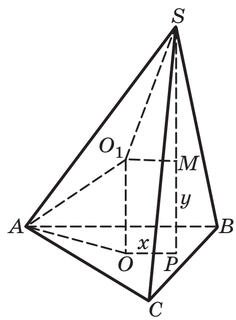


Рис. 94

$$O_1A^2 = OA^2 + OO_1^2, \quad (1)$$

$$O_1S^2 = O_1M^2 + SM^2. \quad (2)$$

Длина отрезка OA равна радиусу окружности, описанной около правильного треугольника ABC со стороной 6, поэтому $OA = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, и равенство (1) примет вид $R^2 = 12 + y^2$.

Из равенства (2) вытекает, что $SM = \sqrt{R^2 - x^2}$ и поскольку в общем случае $PM = |SM - SP|$ (точки O_1 и S могут быть расположены по разные стороны от плоскости ABC), имеем

$$y = |\sqrt{R^2 - x^2} - 4|.$$

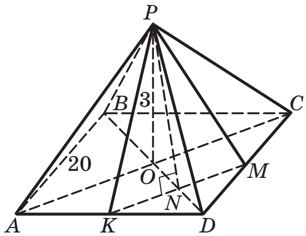


Рис. 95

Следовательно, $R^2 = 12 + \left|\sqrt{R^2 - x^2} - 4\right|^2$, т. е. $R^2 = \frac{(x^2+4)^2}{64} + 12$, откуда следует, что минимальное значение радиуса указанной сферы $R_{\min}$ достигается при $x = 0$. В этом случае точка P совпадает с точкой O (и пирамида является правильной), поэтому основание высоты пирамиды принадлежит треугольнику ABC. Итак, $R_{\min} = \sqrt{\frac{16}{64} + 12} = \frac{7}{2}$.

51. 192. **52.** $\frac{3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$. **53.** $2\sqrt{3}$. **54.** а) 60,5. ▲ По условию $AB = 20$, $PO = 3$ (рис. 95). Тогда $DO = \frac{1}{2}BD = 10\sqrt{2}$. Пусть прямая $KM \parallel AC$ (или KM совпадает с AC) и KMP — треугольное сечение исходной пирамиды $PABCD$. Ясно, что $KM \perp DO$. Так как отрезок ON — проекция отрезка PN на плоскость $ABCD$, а прямая $ON \perp KM$, то $PN \perp KM$ (по теореме о трех перпендикулярах); поэтому площадь сечения $S_{\Delta KMP} = \frac{1}{2}KM \cdot PN$.

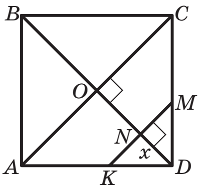


Рис. 96

Положим $x = DN$ $(0 \leqslant x \leqslant 10\sqrt{2})$ и выразим площадь сечения через x. Имеем (рис. 96): $KN = MN = x$, $KM = 2x$, $KD = DM = x\sqrt{2}$. Далее, $ON = DO - DN = 10\sqrt{2} - x$, значит, $PN = \sqrt{PO^2 + ON^2} = \sqrt{3^2 + (10\sqrt{2} - x)^2}$, откуда, раскрыв скобки, получаем $PN = \sqrt{x^2 - 20x\sqrt{2} + 209}$. Тогда

$$S_{\Delta KMP} = S(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - 20x\sqrt{2} + 209}.$$

Для нахождения максимально возможного значения площади сечения вычислим производную функции $S(x)$, которая после очевидных преобразований имеет вид

$$S' = \frac{(x\sqrt{2} - 11)(x\sqrt{2} - 19)}{\sqrt{x^2 - 20x\sqrt{2} + 209}}.$$

Изменение знаков производной исследуем методом интервалов (рис. 97).

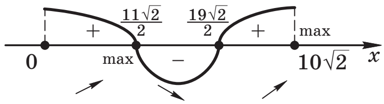


Рис. 97

Так как максимум $S\left(\frac{11\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{33\sqrt{11}}{2}$ больше максимума $S(10\sqrt{2}) = 30\sqrt{2}$, то наибольшая возможная площадь сечения получается при $x = \frac{11\sqrt{2}}{2}$. Вычислим объем отсекаемой треугольной пирамиды $PKMD$ в этом случае.

Площадь основания $S_{\Delta KMD} = \frac{1}{2} \cdot KD \cdot MD = x^2 = \frac{121}{2}$; высота отсекаемой пирамиды $PKMD$ совпадает с высотой исходной пирамиды $PABCD$, и, следовательно, $V_{PKMD} = \frac{1}{3} \cdot PO \cdot S_{\Delta KMD} = $
$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{121}{2} = 60{,}5$.

б) 1,5; в) 3034,5; г) 607,5.

55. $\frac{2\sqrt{26}}{3}$. ▲ Пусть T — середина ребра AC, тогда DT — апофема боковой грани ADC, BT — высота основания ABC пирамиды $DABC$ (рис. 98). Проведем сечение $KLMN$ параллельно ребрам AC и DB. Так как $KLMN \parallel AC$, то $KN \parallel AC$ и $LM \parallel AC$, откуда следует, что $KN \parallel LM$. С другой стороны, так как $KLMN \parallel DB$, то $MN \parallel DB$ и $KL \parallel DB$, откуда следует, что $KL \parallel MN$. Из того, что $KN \parallel LM$ и $KL \parallel MN$, вытекает, что $KLMN$ — параллелограмм.

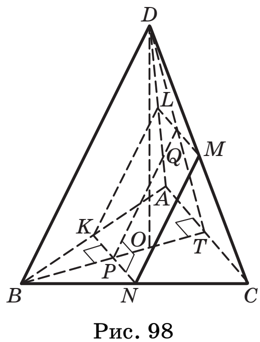


Рис. 98

Пусть $BT \cap KN = P$ — середина KN, а $ST \cap LM = Q$ — середина LM, тогда отрезки PQ, KL и MN равны и параллельны, а так как $KL \parallel DB$, то и $PQ \parallel DB$.

Проекция ребра DB на плоскость основания ABC есть отрезок OB, причем $OB \perp AC$; в силу того, что $PQ \parallel DB$, проекция отрезка PQ на ABC также перпендикулярна AC, а значит и KN, поскольку $KN \parallel AC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $PQ \perp KN$, откуда следует, что параллелограмм $KLMN$ — прямоугольник, площадь которого $S_{KLMN} = KN \cdot PQ$.

По условию $AB = BC = AC = 3$, $DO = \sqrt{78}$.

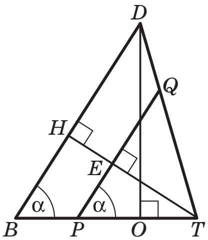


Рис. 99

Тогда $BT = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $BO = \frac{2}{3}BT = \sqrt{3}$, $SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{78+3} = 9$. В ΔBDT проведем высоту TH; $TH \cap PQ = E$ (рис. 99).

Поскольку удвоенная площадь ΔBDT равна $2\,S_{\Delta BDT} = TH \cdot DB = DO \cdot BT$, имеем $TH = \frac{DO \cdot BT}{DB} = \frac{\sqrt{78} \cdot 3\sqrt{3}}{9 \cdot 2} = \frac{\sqrt{26}}{2} > 2$. Положим $ET = x$; по условию $0 \leqslant x \leqslant 2$, так как ET равно расстоянию от отрезка AC (т. е. от любой его точки) до плоскости сечения $KLMN$ в силу их параллельности; таким образом, высота пирамиды с вершиной в точке A и основанием $KLMN$ равна x.

Выразим площадь прямоугольника $KLMN$ и объем пирамиды $AKLMN$ через x. Пусть $\angle HBO = \angle DPO = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{DO}{BO} = \frac{\sqrt{78}}{\sqrt{3}} = \sqrt{26}$; $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$. Из подобия треугольников PQT и BDT следует, что $\frac{PQ}{DB} = \frac{DT}{TH}$, откуда $PQ = DB \times \frac{DT}{TH} = 9 \cdot \frac{x}{\frac{\sqrt{26}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{26}}x$; $PT = \frac{ET}{\sin\angle EPO} = \frac{x}{\sin\alpha}$. В свою очередь из подобия треугольников KBN и ABC вытекает, что $\frac{KN}{AC} = \frac{BP}{BT}$,

т. е. $\frac{KN}{3} = \frac{BT - PT}{BT} = 1 - \frac{PT}{BT} = 1 - \frac{\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{26}}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{2x}{\sqrt{26}}$. Поэтому

объем пирамиды $AKLMN$ выразится функцией $V_{AKLMN} = V(x) = \frac{1}{3}S_{KLMN} \cdot h_A = \frac{1}{3}KN \cdot PQ \cdot x = \left(1 - \frac{2x}{\sqrt{26}}\right) \cdot \frac{18}{\sqrt{26}}x \cdot x = \frac{9}{13}(x^2\sqrt{26} - 2x^3)$.

Максимальное значение объема пирамиды при $0 \leqslant x \leqslant 2$ найдем с помощью производной:

$$V'(x) = \frac{9}{13}(2x\sqrt{26} - 6x^2) = \frac{18x}{13}(\sqrt{26} - 3x).$$

Применяя метод интервалов (рис. 100), заключаем, что максимум функции $V(x)$ достигается при $x = \frac{\sqrt{26}}{3}$ и равен $V_{\max} =$

$$= V\left(\frac{\sqrt{26}}{3}\right) = \frac{9}{13} \cdot \frac{26}{9}\left(\sqrt{26} - \frac{2\sqrt{26}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{26}}{3}.$$

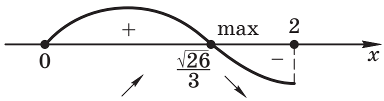


Рис. 100

56. $\frac{8}{9}\sqrt{111}$. **57.** $2\sqrt{219}$. **58.** $\frac{64}{81}\sqrt{23}$.

59. 32. ▲ Введем прямоугольную систему координат $(x;\ y;\ z)$ с началом в точке A, с осью абсцисс, направленной вдоль вектора $\overline{AD}$, осью ординат — вдоль вектора $\overline{AB}$ и осью аппликат — вдоль вектора $\overline{AA_1}$ (рис. 101).

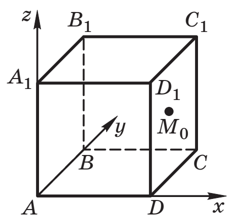


Рис. 101

Пусть x — абсцисса точки M, удовлетворяющей указанному в условии свойству. Тогда точка M имеет координаты $\left(x;\ \frac{3x}{2};\ \frac{9x}{4}\right)$. Так как она принадлежит данному параллелепипеду, то одновременно выполняются неравенства $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant \frac{3x}{2} \leqslant 4$, $0 \leqslant \frac{9x}{4} \leqslant 18$, откуда $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}$.

Найдем квадрат расстояния d точки $M\left(x;\ \frac{3x}{2};\ \frac{9x}{4}\right)$ до точки C_1 (4; 4; 18):

$$d^2 = (4 - x)^2 + \left(4 - \frac{3x}{2}\right)^2 + \left(18 - \frac{9x}{4}\right)^2 = \varphi(x).$$

Поскольку каждое из слагаемых $(4 - x)^2$, $\left(4 - \frac{3x}{2}\right)^2$, $\left(18 - \frac{9x}{4}\right)^2$ убывает на отрезке $\left[0; \frac{8}{3}\right]$, функция $\varphi(x)$ также убывает на этом отрезке, принимая минимальное значение при $x = \frac{8}{3}$. Поэтому наименее удаленная от точки C_1 точка M_0 имеет координаты $\left(\frac{8}{3}; 4; 6\right)$, т. е. высота пирамиды M_0ABCD с вершиной в точке M_0 равна 6. Так как площадь ее основания $ABCD$ равна 16, то искомый объем равен $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 16 = 32$. **60.** 12. **61.** 120. **62.** $\frac{16}{3}$.

Глава X

Задачи с параметрами

§ 1. ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

1. $a \in \left\{-\frac{1}{8}\right\} \cup \{1;\ +\infty\}$. ▲ Перепишем исходное уравнение в виде $f(x) = a$, где

$$f(x) = 4x^2 + 4x|x| - 3x - 3|x| + 1 =$$
$$= (4x-3)(x+|x|) + 1 = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 8x^2 - 6x + 1 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Построив графики функций $y = f(x)$ и $y = a$ и определив графически их общие точки при различных значениях a (рис. 102), заключаем, что при $a > 1$ уравнение $f(x) = a$ имеет одно решение; при $a = 1$ — бесконечно много решений; при $a \in \left(-\frac{1}{8};\ 1\right)$ — два решения; при $a = -\frac{1}{8}$ — одно решение, в этом случае прямая $y = a$ касается параболы $y = 8x^2 - 6x + 1$

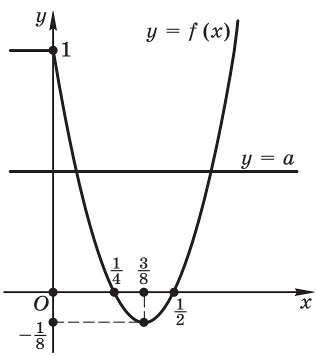


Рис. 102

в ее вершине $\left(\frac{3}{8};\ -\frac{1}{8}\right)$; при $a < -\frac{1}{8}$ уравнение не имеет решений. **2.** $b \in [-3;\ 1)$. **3.** $a \in (-\infty;\ -25) \cup (-1;\ 0) \cup (7;\ +\infty)$. ▲ Исходное уравнение имеет два различных корня, если оно является квадратным уравнением с положительным дискриминантом:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ (3a+5)^2 - 4a(2a+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ (a+1)(a+25) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a < -25, \\ a > -1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$a \in (-\infty; -25) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty). \qquad (1)$$

Используя теорему о расположении корней квадратного трехчлена относительно отрезка, получим следующую систему условий принадлежности наибольшего корня исходного уравнения отрезку $[-1; 3]$:

$$\begin{cases} a \cdot f(3) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} a \cdot f(-1) \leqslant 0, \\ x_0 \in (-1; 3), \end{array}\right. \end{cases}$$

где $f(x) = ax^2 - (3a + 5)x + 2a + 1$, $x_0 = \dfrac{3a+5}{2a}$.

Имеем

$$\begin{cases} a \cdot (9a - (3a + 5) \cdot 3 + 2a + 1) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} a \cdot (a + (3a + 5) + 2a + 1) \leqslant 0, \\ -1 < \dfrac{3a+5}{2a} < 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot (a - 7) \geqslant 0, & (2) \\ \left[\begin{array}{l} a \cdot (a + 1) \leqslant 0, \quad (3) \\ \begin{cases} \dfrac{a+1}{a} > 0, \\ \dfrac{3a-5}{a} > 0. \end{cases} \quad (4) \end{array}\right. \end{cases}$$

Система неравенств (4) имеет решение $(-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$, объединение которого с решением неравенства (3) дает множество $(-\infty; 0] \cup \left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$.

Далее, пересечение этого множества с решением неравенства (2) дает множество $(-\infty; 0] \cup (7; +\infty)$. Наконец, найдя пересечение последнего множества с множеством (1), получаем ответ.

4. $b \in [-1; 0) \cup (0; 11]$. **5.** $c \in \left(0; \dfrac{1}{10}\right] \cup (5; 10]$. **6.** $p \in (-\infty; 0) \cup \cup (0; 7] \cup [27; +\infty)$. **7.** а) $p \in (4 - 2\sqrt{5}; 8{,}5)$. ▲ Исходное неравенство является однородным неравенством второй степени относительно функций $4x - 3$ и $x^2 + 1$. Разделив его на $(x^2 + 1)^2 > 0$, получим равносильное неравенство

$$\left(\frac{4x-3}{x^2+1}\right)^2 + p\left(\frac{4x-3}{x^2+1}\right) + 2p + 1 > 0,$$

откуда после замены $t = t(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$ приходим к квадратному неравенству относительно переменной t с параметром p:

$$t^2 + pt + 2p + 1 > 0. \qquad (1)$$

Найдем множество значений функции $t = t(x)$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Имеем $(x^2 + 1)t = 4x - 3$, или $tx^2 - 4x + t + 3 = 0$.

Отсюда $t = 0$ при $x = \frac{3}{4}$; другие значения t (отличные от нуля) найдем из условия неотрицательности дискриминанта этого квадратного уравнения: $\frac{D}{4} = 2^2 - t(t + 3) = -t^2 - 3t + 4 = (1 - t)(t + 4) \geqslant 0$, т. е. $-4 \leqslant t \leqslant 1$.

Итак, исходное неравенство выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$ тогда и только тогда, когда неравенство (1) выполняется для всех $t \in [-4; 1]$.

Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t) = t^2 + pt + 2p + 1$; абсцисса его вершины $t_в = -\frac{p}{2}$, а дискриминант $D_1 = p^2 - 4(2p + 1) = p^2 - 8p - 4$. Тогда имеем следующие необходимые и достаточные условия для нахождения искомых значений параметра p (рис. 103, *а*—*в*):

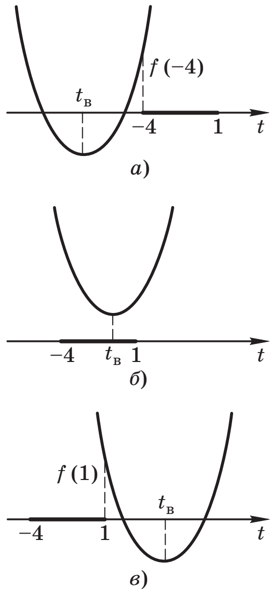


Рис. 103

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_в < -4, \\ f(-4) > 0, \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} -4 \leqslant t_в \leqslant 1, \\ D_1 < 0, \end{cases} \quad (3) \\ \begin{cases} t_в > 1, \\ f(1) > 0. \end{cases} \quad (4) \end{array}\right.$$

Последовательно преобразуя, получаем:

$$(2): \begin{cases} -\frac{p}{2} < -4, \\ (-4)^2 + p \cdot (-4) + 2p + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > 8, \\ p < 8{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow p \in (8;\ 8{,}5);$$

$$(3): \begin{cases} -4 \leqslant -\frac{p}{2} \leqslant 1, \\ p^2 - 8p - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant p \leqslant 8, \\ 4 - 2\sqrt{5} < p < 4 + 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \in (4 - 2\sqrt{5};\ 8);$$

$$(4): \begin{cases} -\frac{p}{2} > 1, \\ 1^2 + p + 2p + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < -2, \\ p > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow p \in \varnothing.$$

Объединяя решения систем (2)—(4), получаем ответ.

б) $a \in (-2;\ 23)$; в) $b \in (4 - 2\sqrt{2};\ +\infty)$; г) $q \in (-3;\ 6 + 4\sqrt{5})$.

8. а) $x \in \varnothing$ при $a < 3$; $x \in [-2;\ 1]$ при $a = 3$; $x \in \left\{-\frac{a+1}{2};\ \frac{a-1}{2}\right\}$ при $a > 3$. ● Запишите левую часть уравнения в виде

$$|x - 1| + |x + 2| = \begin{cases} -2x - 1 & \text{при } x < -2, \\ 3 & \text{при } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x + 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

б) $\varnothing$ при $|b| > 5$; $x \in (-\infty;\ 3]$ при $b = -5$; $x = \frac{b-1}{2}$ при $-5 < b < 5$; $x \in [2;\ +\infty)$ при $b = 5$. ● Запишите левую часть уравнения в виде

$$|x + 3| - |x - 2| = \begin{cases} -5 & \text{при } x \leqslant -3, \\ 2x + 1 & \text{при } -3 < x < 2, \\ 5 & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$$

в) $\varnothing$ при $c < -1$ и $c > 3$; $x = \frac{(c+1)^2}{2} + 1$ при $-1 \leqslant c \leqslant 3$; $x \in [5;\ +\infty)$ при $c = 3$. ● Запишите левую часть уравнения в виде

$$\sqrt{x-1} + 1 - |\sqrt{x-1} - 2| = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - 1 & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ 3 & \text{при } x \geqslant 5. \end{cases}$$

г) $x = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a + 16a^2}}{2a^2}$ при $-\infty < a < 0$; $x = -3$ при $a = 0$; $x_{1,2} = \frac{1 - 2a \pm \sqrt{1 - 4a + 16a^2}}{2a^2}$ при $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$; $x = \frac{1 - 2a + \sqrt{1 - 4a + 16a^2}}{2a^2}$ при $\frac{1}{4} < a < +\infty$.

9. а) $\varnothing$ при $a < -1$; $x \in [1 - \sqrt{1+a};\ 1 + \sqrt{1+a}]$ при $-1 \leqslant a < 0$; $x \in \left[-\frac{a}{2};\ 1 + \sqrt{1+a}\right]$ при $a \geqslant 0$;

б) $\varnothing$ при $a > -\frac{3}{4}$; $x \in \left[\frac{1-2a-\sqrt{-3-4a}}{2};\ \frac{1-2a+\sqrt{-3-4a}}{2}\right]$ при $-1 \leqslant a \leqslant -\frac{3}{4}$; $x \in \left[1;\ \frac{1-2a+\sqrt{-3-4a}}{2}\right]$ при $a < -1$;

в) $\varnothing$ при $p \leqslant -1$; $x \in \left[\frac{1}{2};\ \frac{p^2+2}{2(1-2p)}\right)$ при $-1 < p < \frac{1}{2}$; $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ при $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 2$; $x \in \left(-\frac{2+p^2}{2(2p-1)};\ -1\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right]$ при $p > 2$;

г) $x \in [-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{3}{2};\ +\infty\right]$ при $p < -2$; $x \neq -1$ при $p = -2$; $x \in \left[-\infty;\ \frac{6+p^2}{2(2p-1)}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ при $-2 < p < \frac{1}{2}$; $x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ при $\frac{1}{2} \leqslant p < 3$; $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ при $p = 3$; $x \in \left(\frac{p^2+6}{2(2p-1)}; +\infty\right)$ при $p > 3$.

10. а) $a \in \left[0;\ \frac{4}{7}\right]$. ▲ Полагая $t = 3^x > a$, сведем исходное показательное неравенство к алгебраическому неравенству относительно переменной t с параметром a:

$$at^2 + (1-a)t - \frac{7}{4}a + 1 > 0, \qquad (1)$$

причем оно должно выполняться для всех $t > 0$.

При $a = 0$ неравенство (1) является линейным:

$$0 \cdot t^2 + (1-0) \cdot t - \frac{7}{4} \cdot 0 + 1 > 0, \text{ т. е. } t + 1 > 0,$$

что, очевидно, выполняется для всех $t > 0$ и, следовательно, значение $a = 0$ является одним из искомых.

При $a \neq 0$ неравенство (1) является квадратным. Обозначим через $f(t)$ его левую часть:

$$f(t) = at^2 + (1-a)t - \frac{7}{4}a + 1.$$

Функция $f(t)$ — квадратный трехчлен с дискриминантом $D = (1-a)^2 - 4a\left(-\frac{7}{4}a + 1\right) = (4a-1)(2a-1)$; его график — парабола с абсциссой вершины $t_0 = \frac{a-1}{2a}$.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз, поэтому неравенство (1) не может выполняться для всех $t > 0$.

Если $a > 0$, то неравенство (1) выполняется для всех $t > 0$ тогда и только тогда, когда либо парабола не имеет общих точек с осью абсцисс ($D < 0$), либо функция $f(t)$ имеет корни ($D \geqslant 0$), но больший корень неположителен (по теореме о расположении корней квадратного трехчлена относительно луча для этого необходимо и достаточно, чтобы t_0 было неположительно, а значение $f(0)$ было неотрицательно):

$$\begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} D < 0, \\ \begin{cases} D \geqslant 0, \\ t_0 \leqslant 0, \\ f(0) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} (4a-1)(2a-1) < 0, \\ \begin{cases} (4a-1)(2a-1) \geqslant 0, \\ \dfrac{a-1}{2a} \leqslant 0, \\ a \cdot 0^2 + (1-a)\cdot 0 - \dfrac{7}{4}a + 1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{4} < a < \dfrac{1}{2}, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ a \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \leqslant 1, \\ a \leqslant \dfrac{4}{7} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{4} < a < \dfrac{1}{2}, \\ a \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{4}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \leqslant \dfrac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leqslant \dfrac{4}{7}.$$

Объединяя полуинтервал $\left(0; \dfrac{4}{7}\right]$ с найденным ранее значением $a = 0$, получаем ответ.

б) $c \in \left[-\dfrac{3}{5}; 0\right]$; в) $b \in \left[0, \dfrac{2}{7}\right]$; г) $p \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

11. а) $x_1 = 1$ при $a \leqslant 0$; $x_1 = 1$ и $x_2 = \log_2 a$ при $a > 0$;

б) $x_1 = 1$ и $x_2 = \log_3(-b)$ при $b < 0$; $x_1 = 1$ при $b \geqslant 0$;

в) $x_1 = -1$ и $x_2 = \log_2(-c)$ при $c < 0$; $x_1 = -1$ при $c \geqslant 0$;

г) $x_1 = -2$ при $k \leqslant 0$; $x_1 = -2$ и $x_2 = \log_3 k$ при $k > 0$.

12. а) $k \in \left(-4; -\frac{4}{5}\right] \cup \left\{-\frac{2}{3}; 3-\sqrt{13}\right\}$. ▲ Исходное логарифмическое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - x^2 - \frac{5}{4} = (\sqrt{kx+2})^2, \\ 3x - x^2 - \frac{5}{4} > 0, \\ \sqrt{kx+2} > 0, \\ \sqrt{kx+2} \neq 1, \end{cases}$$

которая после очевидных преобразований примет вид

$$\begin{cases} 3x - x^2 - \frac{5}{4} = kx + 2, \\ 3x - x^2 - \frac{5}{4} > 0, \\ 3x - x^2 - \frac{5}{4} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - x^2 - \frac{5}{4} = kx + 2, \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим на одном чертеже график функции $y = 3x - x^2 - \frac{5}{4}$ при $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ и график функции $y = kx + 2$ для различных значений k (рис. 104) и выясним, когда прямая, проходящая через точку (0; 2) (график функции $y = kx + 2$), и парабола

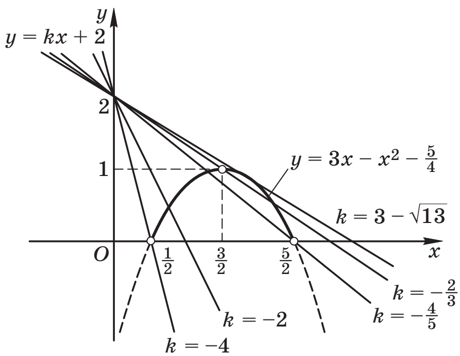


Рис. 104

$\left(\text{график функции } y = 3x - x^2 - \frac{5}{4}\right)$ имеют при $x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$ единственную общую точку.

Среди прямых $y = kx + 2$, которые для всех значений k проходят через точку (0; 2), выделим прямую, соответствующую $k = -4$ $\left(\text{она проходит через точку } \left(\frac{1}{2};\ 0\right)\right)$; $k = -\frac{4}{5}$ $\left(\text{она проходит через точку } \left(\frac{5}{2};\ 0\right)\right)$; $k = -\frac{2}{3}$ $\left(\text{она проходит через «выколотую» на параболе точку } \left(\frac{3}{2};\ 1\right)\right)$, а также прямую, соответствующую $k = 3 - \sqrt{13}$ (касательную к параболе). Последнее значение k находим, приравняв нулю дискриминант квадратного уравнения $3x - x^2 - \frac{5}{4} = kx + 2$ (берем отрицательное значение k, так как при $k \geqslant 0$ прямая $y = kx + 2$ и парабола $y = 3x - x^2 - \frac{5}{4}$ не имеют общих точек ни при $x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, ни при $x \in \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$.

Выясним теперь, для каких отрицательных значений k прямая $y = kx + 2$ и часть параболы $y = 3x - x^2 - \frac{5}{4}$ при $x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$ имеют единственную общую точку.

Если $k \in (-\infty; -4]$, то прямая и парабола при всех $x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$ не имеют общих точек.

Если $k \in \left(-4;\ -\frac{4}{5}\right]$, то прямая и парабола имеют единственную точку пересечения при $x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ и, следовательно, эти значения k являются искомыми.

Если $k \in \left(-\frac{4}{5};\ -\frac{2}{3}\right)$, то прямая и парабола имеют две различные точки пересечения $\left(\text{одну — при } x \in \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)\text{, другую —}\right.$ $\left.\text{при } x \in \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)\right)$, поэтому исследуемые значения k не войдут в ответ.

При $k = -\frac{2}{3}$ прямая и парабола также имеют две различные точки пересечения, но одна их них — «выколотая» точка параболы $\left(\frac{3}{2};\ 1\right)$, а другая принадлежит интервалу $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$, и следовательно, это значение k является искомым.

Если $k \in \left(-\frac{2}{3};\ 3 - \sqrt{13}\right)$, то прямая и парабола имеют две различные точки пересечения $\left(\text{причем обе — при } x \in \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)\right)$, поэтому исследуемые значения k не войдут в ответ.

При $k = 3 - \sqrt{13}$ прямая и парабола касаются (т. е. имеют единственную общую точку) и, следовательно, это значение k является искомым, так как эта точка принадлежит интервалу $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$.

Если $k \in (3 - \sqrt{13};\ 0)$, то прямая и парабола вообще не имеют общих точек.

Объединяя полуинтервал $\left(-4;\ -\frac{4}{5}\right]$ с найденными значениями $k = -\frac{2}{3}$ и $k = 3 - \sqrt{13}$, получаем ответ.

б) $k \in \left(-1;\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{-\frac{1}{3};\ 6 - 2\sqrt{10}\right\}$; в) $k \in \left(-4;\ -\frac{4}{3}\right] \cup$ $\cup \left\{-1;\ 8 - 4\sqrt{5}\right\}$; г) $k \in \left(-2;\ -\frac{2}{3}\right] \cup \left\{-\frac{1}{2};\ 4 - 2\sqrt{5}\right\}$.

13. а) $a \in \left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)$. ▲ Записав исходное неравенство в виде

$$\log_{\frac{9-5a}{4}}\left[\frac{(3-a)x^2 - 4a + 7}{x^2 + 4}\right] > \log_{\frac{9-5a}{4}} 1,$$

заключаем, что оно равносильно следующей совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < \dfrac{9-5a}{4} < 1,\\[2mm] 0 < \dfrac{(3-a)x^2-4a+7}{x^2+4} < 1,\end{cases}\\[6mm] \begin{cases}\dfrac{9-5a}{4} > 1,\\[2mm] \dfrac{(3-a)x^2-4a+7}{x^2+4} > 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < 9-5a < 4,\\ (3-a)x^2-4a+7 > 0,\\ (3-a)x^2-4a+7 < x^2+4,\end{cases}\\ \begin{cases}9-5a > 4,\\ (3-a)x^2-4a+7 > x^2+4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1 < a < \dfrac{9}{5},\\ (3-a)x^2-4a+7 > 0,\\ (2-a)x^2-4a+3 < 0,\end{cases} \qquad (1)\\ \begin{cases}a < 1,\\ (2-a)x^2-4a+3 > 0.\end{cases} \qquad (2)\end{array}\right.$$

В системе (1) параметр $a < \dfrac{9}{5}$, поэтому коэффициент $2 - a$ при x^2 в левой части последнего неравенства положителен, следовательно, это неравенство равносильно неравенству $x^2 < \dfrac{4a-3}{2-a}$, которое не может выполняться для всех действительных значений x при любом фиксированном значении параметра a. Таким образом, система (1) не дает искомых значений параметра.

В системе (2) из первого неравенства ($a < 1$) так же, как и раньше, вытекает, что $2 - a > 0$, следовательно, второе неравенство этой системы равносильно неравенству $x^2 > \dfrac{4a-3}{2-a}$, которое, очевидно, выполняется для всех действительных x тогда и только тогда, когда $\dfrac{4a-3}{2-a} < 0$ (рис. 105).

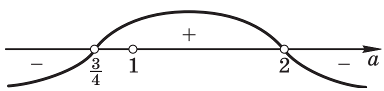


Рис. 105

Учитывая, что $a < 1$, получаем $a < \frac{3}{4}$, т. е. $a \in \left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)$.

б) $a \in \left(\frac{57}{28};\ +\infty\right)$. в) $a \in \left(-\frac{5}{3};\ -\frac{7}{5}\right]$; г) $a \in \left(\frac{5}{2};\ \frac{8}{3}\right)$.

14. а) $a \in \left(\frac{14}{5};\ 4\right) \cup \left(4;\ \frac{14}{3}\right] \cup \left\{\frac{24}{5}\right\}$. ▲ Областью определения исходного уравнения является совокупность решений системы неравенств

$$\begin{cases} (3-2x)(2x-5) > 0, \\ ax - 7 > 0, \\ ax - 7 \neq 1, \end{cases}$$

первое из которых удовлетворяется при $x \in \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$. Найдем количество решений данного уравнения при различных значениях параметра a.

Пусть $a \in (-\infty;\ 0)$. Тогда второе неравенство системы, удовлетворяющееся при $x < \frac{7}{a}$, не имеет общих точек с интервалом $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$, поэтому исходное уравнение не имеет решений.

Пусть $a = 0$. Тогда второе неравенство системы не удовлетворяется ни при каких значениях x, и, значит, исходное уравнение также не имеет решений.

Пусть $a \in \left(0;\ \frac{14}{5}\right]$. Тогда второе неравенство системы, удовлетворяющееся при $x > \frac{7}{a}$, не имеет общих точек с интервалом $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$, поэтому исходное уравнение также не имеет решений.

Пусть $a \in \left(\frac{14}{5};\ \frac{16}{5}\right]$. Тогда областью определения исходного уравнения является интервал $\left(\frac{7}{a};\ \frac{5}{2}\right)$, в котором уравнение равносильно квадратному уравнению

$$-4x^2 + 16x - 15 = (ax - 7)^2,$$

или

$$(a^2+4)x^2-2(7a+8)x+64=0,$$

из двух корней которого

$$x_{1,2}=\frac{7a+8\pm\sqrt{112a-15a^2-192}}{a^2+4},$$

только большший корень $x=\dfrac{7a+8+\sqrt{112a-15a^2-192}}{a^2+4}$ принадлежит области определения и, следовательно, исходное уравнение имеет только одно решение.

Пусть $a\in\left(\dfrac{16}{5};\ 4\right)$. Тогда областью определения исходного уравнения является объединение интервалов $\left(\dfrac{7}{a};\dfrac{8}{a}\right)\cup\left(\dfrac{8}{a};\dfrac{5}{2}\right)$. В этом случае аналогичные рассуждения приводят к тому, что исходное уравнение имеет только одно решение.

Пусть $a=4$. При этом областью определения исходного уравнения является множество $\left(\dfrac{7}{4};2\right)\cup\left(2;\ \dfrac{5}{2}\right)$, в котором равносильное исходному квадратное уравнение

$$5x^2-18x+16=0$$

имеет корни

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{5}=\left\{\frac{8}{5};2\right\},$$

не принадлежащие области определения, и поэтому исходное уравнение не имеет решений.

Пусть $a\in\left(4;\ \dfrac{14}{3}\right]$. Тогда областью определения исходного уравнения является объединение интервалов $\left(\dfrac{7}{a};\dfrac{8}{a}\right)\cup\left(\dfrac{8}{a};\dfrac{5}{2}\right)$. В этом случае аналогичные рассуждения приводят к тому, что исходное уравнение имеет только одно решение.

Пусть $a \in \left(\dfrac{14}{3};\ \dfrac{24}{5} \right]$. Тогда областью определения исходного уравнения является объединение интервалов $\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{8}{a} \right) \cup \left(\dfrac{8}{a};\ \dfrac{5}{2} \right)$. В этом случае равносильное исходному квадратное уравнение

$$(a^2 + 4)x^2 - 2(7a + 8)x + 64 = 0$$

имеет два различных корня

$$x_{1,2} = \frac{7a + 8 \pm \sqrt{112a - 15a^2 - 192}}{a^2 + 4},$$

которые принадлежат области определения, поэтому исходное уравнение имеет два решения.

Пусть $a = \dfrac{24}{5}$. Тогда областью определения исходного уравнения является множество $\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{5}{3} \right) \cup \left(\dfrac{5}{3};\ \dfrac{5}{2} \right)$, в котором равносильное исходному квадратное уравнение

$$169x^2 - 520x + 400 = 0$$

имеет два равных корня

$$x_{1,2} = \frac{20}{13},$$

поэтому исходное уравнение имеет только одно решение.

Пусть $a \in \left(\dfrac{24}{5};\ \dfrac{16}{3} \right]$. Тогда областью определения исходного уравнения является объединение интервалов $\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{8}{a} \right) \cup \left(\dfrac{8}{a};\ \dfrac{5}{2} \right)$, в котором равносильное исходному квадратное уравнение

$$(a^2 + 4)x^2 - 2(7a + 8)x + 64 = 0$$

имеет отрицательный дискриминант, и, значит, так же как и исходное, не имеет решений.

Пусть $a \in \left[\dfrac{16}{3};\ +\infty \right)$. Тогда областью определения исходного уравнения является множество $\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{5}{2} \right)$, в котором равносильное исходному квадратное уравнение (как и в предыдущем случае) имеет отрицательный дискриминант, и поэтому вместе с исходным не имеет решений.

Из вышеприведенных рассуждений получаем ответ.

б) $b \in \left(\frac{10}{7}; \frac{12}{7}\right) \cup \left(\frac{12}{5}; \frac{10}{3}\right] \cup \left\{\frac{24}{7}\right\}$; в) $c \in \left(\frac{7}{5}; 2\right) \cup \left(2; \frac{7}{3}\right] \cup$

$\cup \left\{\frac{12}{5}\right\}$; г) $d \in \left(\frac{34}{7}; 6\right) \cup \left(6; \frac{34}{5}\right)$.

15. а) $p \in [4 + \sqrt{5}; 9)$. ▲ Сложив почленно уравнения системы, перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - p, \\ x^2 + 2x + y^2 + 2y = 3, \\ y \leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{x}{2} + c, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5, \\ y \leqslant -1, \end{cases}$$

где $c = \frac{1-p}{2}$, и рассмотрим геометрическую интерпретацию входящих в нее соотношений (рис. 106). На координатной плоскости первое уравнение системы задает семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$. Второе уравнение системы задает окружность с центром $(-1; -1)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Совместно с неравенством $y \leqslant -1$ это уравнение определяет ее половину, расположенную в полуплоскости, ограниченной горизонтальной прямой $y = -1$, т. е. нижнюю полуокружность $y = -1 - \sqrt{5-(x+1)^2}$, ограниченную точками $A(-1 - \sqrt{5}; -1)$ и $B(-1 + \sqrt{5}; -1)$.

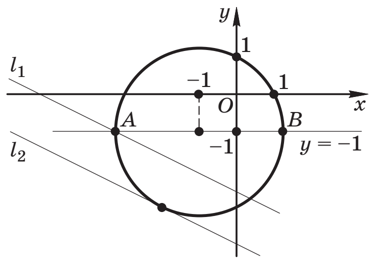


Рис. 106

Таким образом, при заданном значении параметра p, а значит, и величины c, число решений рассматриваемой системы равно числу точек пересечения прямой $y = -\frac{x}{2} + c$ с нижней полуокружностью AB (включая ее граничные точки).

Пусть прямая l_1, заданная уравнением $y = -\frac{x}{2} + c_1$, проходит через точку A; прямая l_2, заданная уравнением $y = -\frac{x}{2} + c_2$, является касательной к полуокружности AB (см. рис. 106). Тогда любая прямая l вида $y = -\frac{x}{2} + c$, расположенная выше прямой l_2, но не выше прямой l_1, имеет ровно две общие точки с нижней полуокружностью AB. В остальных случаях прямая l будет иметь с ней не более одной общей точки. Следовательно, требования задачи выполняются при $c \in (c_2;\ c_1]$, т. е. искомые значения параметра $p \in [p_1;\ p_2)$, где $p_1 = 1 - 2c_1$, $p_2 = 1 - 2c_2$. Найдем c_1:

$$A \in l_1 \Rightarrow -1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Число c_2, очевидно, является отрицательным (см. рис. 106); его можно найти из условия, что уравнение

$$-\frac{x}{2} + c_2 = -1 - \sqrt{5-(x+1)^2}$$

имеет единственное решение. Имеем

$$(x - 2(c_2 + 1))^2 = 4(5 - (x + 1)^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 + 4(1 - c_2)x + 4(c_2^2 + 2c_2 - 3) = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет единственное решение при условии $D = 0$. Так как

$$\frac{D}{4} = 4(1 - c_2)^2 - 20(c_2^2 + 2c_2 - 3) = -16(c_2 - 1)(c_2 + 4),$$

то $c_2 = -4$. Вычислив $p_1 = 4 + \sqrt{5}$, $p_2 = 9$, получим ответ.

б) $a \in [3;\ 2\sqrt{5} + 1)$. **16.** $b \in (0;\ 4] \cup \{2(\sqrt{2} + 1)\}$. **17.** а) $a \in \left(\frac{4}{9};\ 1\right) \cup$ $\cup\ (1;\ 4)$.

▲ Для вычисления экстремумов функции $y(x)$ найдем ее производную

$$y'(x) = \left(\frac{x^2 + 2ax - 3a - 4}{x-2}\right)' = \frac{(2x+2a)(x-2) - (x^2+2ax-3a-4)}{(x-2)^2} =$$
$$= \frac{x^2 - 4x + 4 - a}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - a}{(x-2)^2},$$

откуда следует, что в точках экстремума, т. е. при $y'(x) = 0$, значение параметра $a = (x - 2)^2 > 0$, так как $x \neq 2$. Поэтому интервал $(a;\ 3a)$, на котором, согласно условию задачи, надо искать экстремум, целиком расположен справа от точки $x = 2$.

Приведем два способа решения.

I способ. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2 - 4x + 4 - a$ с абсциссой вершины $x_в = 2$ и дискриминантом D, который положителен, поскольку $\frac{D}{4} = 2^2 - (4 - a) = a > 0$.

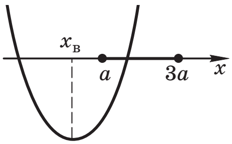


Рис. 107

Если абсцисса $x_в$ вершины параболы, являющейся графиком функции $y = f(x)$, расположена левее интервала $(a;\ 3a)$, т. е. $x_в \leqslant a$, то значения $f(a)$ и $f(3a)$ должны иметь разные знаки, причем $f(a)$ отрицательно (рис. 107):

$$\begin{cases} x_в \leqslant a, \\ f(a) < 0, \\ f(3a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 2, \\ a^2 - 5a + 4 < 0, \\ 9a^2 - 13a + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 2, \\ 1 < a < 4, \\ \left[\begin{array}{l} a < \frac{4}{9}, \\ a > 1, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда следует, что $2 \leqslant a < 4$.

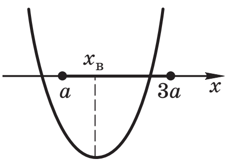


Рис. 108

Если же $x_в$ лежит строго между a и $3a$, то либо $f(a)$, либо $f(3a)$ должно быть положительно (рис. 108):

$$\begin{cases} a < x_в < 3a, \\ \left[\begin{array}{l} f(a) > 0, \\ f(3a) > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < a < 2, \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - 5a + 4 > 0, \\ 9a^2 - 13a + 4 > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < a < 2, \\ \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 4, \\ a < \frac{4}{9}, \\ a > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < a < 2, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{3} < a < 1, \\ 1 < a < 2, \end{array}\right.$$

откуда следует, что $a \in \left(\frac{2}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 2)$.

Если, наконец, $x_в$ лежит правее интервала $(a; 3a)$, т. е. $x_в > 3a$, то значения $f(a)$ и $f(3a)$ должны иметь разные знаки, причем $f(a)$ положительно (рис. 109):

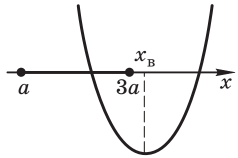


Рис. 109

$$\begin{cases} x_в \geqslant 3a, \\ f(a) > 0, \\ f(3a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \dfrac{2}{3}, \\ a^2 - 5a + 4 > 0, \\ 9a^2 - 13a + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \dfrac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > 4, \end{array}\right. \\ \dfrac{4}{9} < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{4}{9} < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{9} < a \leqslant \frac{2}{3}.$$

Объединяя найденные значения параметра a в рассмотренных выше трех случаях: $a \in [2; 4)$, $a \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$, $a \in \left(\dfrac{4}{9}; \dfrac{2}{3}\right]$, получаем ответ.

II способ. Как мы установили ранее, в точках экстремума, т. е. при $y'(x) = 0$, имеем $a = (x - 2)^2$. В плоскости xOa построим график функции $a = a(x) = (x - 2)^2$ (рис. 110).

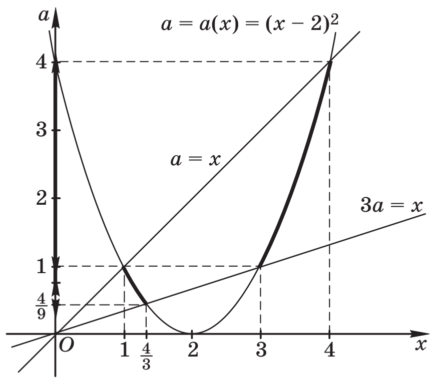


Рис. 110

Будем искать точки экстремума на интервале $(a; 3a)$. т. е. при

$$\begin{cases} a < x, \\ 3a > x, \end{cases}$$

что соответствует внутренним точкам острого угла, ограниченного прямыми $a = x$ и $3a = x$ и находящегося в первой четверти. Найдем точки пересечения прямых $a = x$ и $3a = x$ с параболой $a = (x - 2)^2$. Решив квадратные уравнения, получаем

$$\begin{cases} a = x, \\ a = (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 4\},$$

$$\begin{cases} 3a = x, \\ a = (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow a \in \left\{\frac{4}{9}; 1\right\}.$$

Так как $y'(x) > 0$ при $a < (x - 2)^2$ и $y'(x) < 0$ при $a > (x - 2)^2$, то исходная функция $y(x)$ возрастает в области $(x; a)$, расположенной ниже параболы $a = (x - 2)^2$, и убывает в области, расположенной выше этой параболы; в точках параболы функция $y(x)$ имеет экстремум (в силу того, что выполнено достаточное условие экстремума — смена знака производной).

Левая ветвь параболы $a = (x - 2)^2$ пересекается с прямыми $3a = x$ и $a = x$ в точках $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{9}\right)$ и $(1; 1)$ соответственно.

Все точки параболы, расположенные строго между этими точками пересечения, отвечают точкам экстремума функции $y(x)$, соответствующим искомым значениям параметра a: $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right)$ (проекция на ось Oa указанного участка левой ветви параболы $a = (x - 2)^2$).

Правая ветвь параболы $a = (x - 2)^2$ пересекается с прямыми $3a = x$ и $a = x$ в точках $(3; 1)$ и $(4; 4)$ соответственно. Все точки параболы, расположенные строго между этими точками пересечения, отвечают точкам экстремума функции $y(x)$, соответствующим искомым значениям параметра a: $a \in (1; 4)$ (проекция на ось Oa указанного участка правой ветви параболы $a = (x - 2)^2$).

Объединив найденные интервалы $\left(\frac{4}{9}; 1\right)$ и $(1; 4)$ значений параметра a, получим ответ. б) $a \in \left(-4; -\frac{15}{4}\right) \cup (5; 12)$; в) $a \in (-8; -3) \cup \left(-\frac{24}{25}; -\frac{9}{16}\right)$; г) $a \in (-36; -1)$.

§ 2. ЗАДАЧИ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

1. а) $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

$x \in \left\{\frac{\pi}{6} \pm \arccos\left(a+\frac{1}{2}\right)+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi n \,|k, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup$

$\cup\, (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$; $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n \mid k, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $a \in \{-1\}$.

▲ Областью определения исходного уравнения (при $a \neq 0$) являются все значения x, при которых $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому исходное уравнение приводится к виду

$$a \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin x\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right). \qquad (1)$$

Так как

$$\cos^2 x - \frac{1}{4} = \left(\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -2 \sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2} \sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2} \cdot 2 \cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2} \cos\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2} =$$

$$= -\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

то уравнение (1) можно заменить равносильным уравнением

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\left[a + 2\sin x \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 0.$$

Следовательно, либо $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$, т. е. $x = -\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (все такие значения x принадлежат области определения исходного уравнения), либо $a + 2 \sin x \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$, откуда $a + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$, что приводит к уравнению

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = a + \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Это уравнение при $\left|a + \frac{1}{2}\right| \leqslant 1$, т. е. при $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, имеет решения

$$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{1}{2} \arccos\left(a + \frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Для того чтобы эти решения принадлежали области определения исходного уравнения, необходимо выполнение условия $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\arccos\left(a + \frac{1}{2}\right) \neq \frac{\pi}{2}$, или $\arccos\left(a + \frac{1}{2}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$, откуда $a \neq -1$. Это означает, что при $a = -1$ остается только серия решений

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\arccos\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \pi k = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Чтобы решения уравнения (2) принадлежали области определения исходного уравнения, необходимо также выполнение условия $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\arccos\left(a + \frac{1}{2}\right) \neq 0$, или $\arccos\left(a + \frac{1}{2}\right) \neq \frac{\pi}{3}$, что, очевидно, выполняется, поскольку $a \neq 0$.

б) $x \in \left\{\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $p \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$;

$x \in \left\{-\frac{\pi}{6} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{p+1}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi k \mid n, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $p \in [-3; -2) \cup$ $\cup\ (-2; 0) \cup (0; 1]$; $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi k \mid n, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $p \in \{-2\}$;

в) $x \in \left\{\frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{q-2}{2q} + \pi n;\ -\frac{\pi}{6} + \pi k \mid n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $q \in$ $\in (-\infty;\ -2] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1;\ +\infty)$; $x \in \left\{-\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $q \in$ $\in \left(-2; \frac{2}{3}\right)$; $x \in \left\{\frac{2}{3}\pi + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi k \mid n, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ при $q \in \{1\}$.

2. а) $a \in (-\infty; 0) \cup \left\{\frac{25}{8}\right\}$. ▲ Учитывая, что $\cos 8x = 1 - 2\sin^2 4x$, приведем исходное уравнение

$$2(2a - 1)\sin 4x - (a + 3)\cos 8x + 3a = 1$$

в виду

$$f(t) = 0,$$

где

$$f(t) = (a + 3)t^2 + (2a - 1)t + (a - 2),\ t = \sin 4x.$$

Пусть $a \neq -3$. В этом случае $f(t)$ — квадратный трехчлен, имеющий дискриминант

$$D = (2a - 1)^2 - 4(a + 3)(a - 2) = 25 - 8a.$$

Поскольку $|\sin 4x| \leqslant 1$, для существования решений исходного уравнения необходимо и достаточно, чтобы $D \geqslant 0$, причем хотя бы один из корней t_1 или t_2 уравнения $f(t) = 0$ не превосходил по модулю единицу.

Если $D = 0$, т. е. $a = \frac{25}{8}$, то $t_0 = t_{1,2} = \frac{1 - 2a}{2(a + 3)} = -\frac{3}{7}$, что по модулю меньше единицы. Следовательно, исходное уравнение, эквивалентное уравнению $\sin 4x = t_0$, имеет решения. Точнее, так как функция $t = \sin 4x$ — периодическая, и ее период, равный $\frac{\pi}{2}$, укладывается на отрезке $[-\pi; \pi]$ ровно 4 раза, то оно имеет на этом отрезке ровно восемь решений (на рис. 111 им отвечают восемь точек пересечения прямой $t = t_0$ с синусоидой $t = \sin 4x$). Таким образом, $a = \frac{25}{8}$ является одним из искомых значений параметра.

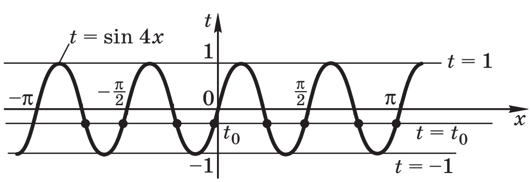


Рис. 111

Если $D > 0$, т. е. $a < \frac{25}{8}$, то уравнение $f(t) = 0$ имеет два различных корня, поэтому исходное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 4x = t_1,\\ \sin 4x = t_2.\end{array}\right.$$

Проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были сделаны при рассмотрении случая $D = 0$, приходим к выводу, что в данном случае исходное уравнение будет иметь ровно восемь решений на отрезке $[-\pi; \pi]$ либо при условии, что один из корней (t_1 или t_2) окажется вне отрезка $[-1; 1]$, а другой будет принадлежать интервалу $(-1; 1)$ и при этом не будет равен нулю (на отрезке $[-\pi; \pi]$ график функции $t = \sin 4x$ пересекает ось абсцисс в девяти точках), либо при $t_{1,2} = \pm 1$, когда каждая из прямых $t = -1$ и $t = 1$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ касается четырех точек синусоиды $t = \sin 4x$, в которых достигаются максимум и минимум этой функции (рис. 111).

Итак, полагая, например, $t_1 < t_2$, рассмотрим следующие три случая:

$$\text{а) } \begin{cases} t_1 < -1, \\ 0 < |t_2| < 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0 < |t_1| < 1, \\ t_2 > 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} t_1 = -1, \\ t_2 = 1. \end{cases}$$

Так как t_1 и t_2 — корни квадратного трехчлена $f(t)$, то случаи а) и б) реализуются, когда значения $f(t)$ на концах отрезка $[-1; 1]$ имеют разные знаки, т. е. $f(-1)\,f(1) < 0$, причем $f(0) \neq 0$, а случай в) — когда $f(-1) = f(1) = 0$.

Вычислив $f(-1) = 2$, $f(0) = a - 2$ и $f(1) = 4a$, заключаем, что случай в) невозможен, а случаям а) и б) отвечает условие $a < 0$. Объединяя результаты исследований при $D = 0$ и $D > 0$, получаем $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup \left\{\frac{25}{8}\right\}$.

Пусть $a = -3$. Тогда уравнение $f(t) = 0$ становится линейным: $-7t - 5 = 0$, откуда $t = -\frac{5}{7}$; поскольку $0 < |t| < 1$, и в этом случае исходное уравнение имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ ровно восемь решений. Итак, $a \in (-\infty; 0) \cup \left\{\frac{25}{8}\right\}$. б) $b \in (-\infty; 5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $c \in (5; 11)$; г) $p \in \{-2; 1\}$.

3. а) $a = 1$. ▲ Исходное уравнение имеет смысл лишь при $a \leqslant 1$. Для преобразования его левой части воспользуемся методом введения вспомогательного аргумента. Полагая $b = \sqrt{3(1-a)}$, имеем

$$a \sin 3x + \sqrt{3(1-a)} \cos 3x = a\sin 3x + b\cos 3x =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin 3x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos 3x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin 3x \cos \varphi + \cos 3x \sin \varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(3x+\varphi) = \sqrt{a^2-3a+3}\,\sin(3x+\varphi),$$

где угол φ определяется равенствами

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-3a+3}},$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{3(1-a)}{a^2-3a+3}}.$$

Таким образом, исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sin(3x+\varphi) = \frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}}.$$

Наименьший положительный период функции, записанной в левой части равенства, есть $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция $y = \sin(3x+\varphi)$ трижды принимает наибольшее значение, равное 1, и трижды принимает наименьшее значение, равное -1, если только эти значения не принимаются на концах отрезка, т. е. если $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Так как данное уравнение будет иметь ровно три решения на отрезке $[-\pi; \pi]$, если прямая $y = \frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}}$ пересечет синусоиду $y = \sin(3x+\varphi)$ только в трех точках, то получаем

$$\begin{cases} \dfrac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}} = \pm 1, \\ a \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-3)^2 = a^2-3a+3, \\ a \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-3a+2 = 0, \\ a \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0, \\ a \leqslant 1 \end{cases}$$

откуда $a = 1$. Этому значению отвечает $\sin \varphi = 0$, так что в этом случае заведомо $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Если же $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, то для существования ровно трех решений необходимо выполнение уже рассмотренного условия $\left|\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}}\right| = 1$, а, значит, других подходящих значений a нет. Итак, $a = 1$; б) $b = -2$; в) $c = \frac{1}{24}$; г) $d = 2$.

4. а) $a = 3$. ▲ Так как левая часть уравнения является четной функцией, то наряду с решением x уравнение будет иметь и решение $-x$. Поэтому единственным решением уравнения может быть только $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в исходное уравнение, получаем, что параметр a удовлетворяет условию $a^2 - 2a - 3 = 0$, т. е. $a = -1$ и $a = 3$. При $a \neq -1$ и $a \neq 3$ исходное уравнение либо не имеет решений, либо имеет более одного решения. Значение $a = -1$ не входит в область определения параметра (нуль в знаменателе), а при $a = 3$ исходное уравнение принимает вид

$$9\cos x + \sin^2\frac{x}{2} - 6\sqrt{x^2+1} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\cos x + \frac{1-\cos x}{2} - 6\sqrt{x^2+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{17}{2}\cos x = \frac{5}{2} + 6\sqrt{x^2+1}.$$

Но $\frac{17}{2}\cos x \leqslant \frac{17}{2} \leqslant \frac{5}{2} + 6\sqrt{x^2+1}$ для всех x, причем одновременно равенство достигается только при $x = 0$; поэтому $x = 0$ — единственное решение исходного уравнения при $a = 3$. б) 1; в) ± 1; г) 2. **5.** а) $a = -4 \pm \sqrt{13}$. ▲ Перепишем уравнение в виде

$$2\sin 4x - 3\cos 4x = a + 4.$$

Полагая $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$, имеем $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$ и, значит,

$$2\sin 4x - 3\cos 4x =$$

$$= \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 4x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 4x\right) = \sqrt{13}\sin(4x - \varphi).$$

Таким образом, исходное уравнение принимает вид

$$\sin(4x - \varphi) = \frac{a+4}{\sqrt{13}}.$$

Длина промежутка, на котором рассматривается данное уравнение, составляет $L = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2. По теореме Пифагора длина его гипотенузы равна $\sqrt{5}$. Отсюда следует, что один из его острых углов равен $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, а другой острый угол равен $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Так как сумма этих углов равна $\dfrac{\pi}{2}$, то $L = \dfrac{\pi}{2}$.

Период функции $\sin(4x - \varphi)$ также равен $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда модуль левой части уравнения равен 1, т. е. $\left|\dfrac{a+4}{\sqrt{13}}\right| = 1$, откуда находим $a = -4 \pm \sqrt{13}$.

б) $a = 2 \pm \sqrt{34}$; в) $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{20}}{3}$; г) $a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{5}$.

Глава XI

Разные задачи

§ 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СУММИРОВАНИЕ

3. ▲ Так как справедливы соотношения $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, ..., $\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то, сложив их, получим $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Замечание. Доказательство легко провести методом математической индукции.

4. ▲ 1. При $n = 1$ неравенство истинно, что очевидно. 2. Допустим, что неравенство справедливо при $n = k$, где k — любое натуральное число, т. е. что $|\sin kx| \leqslant k|\sin x|$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Докажем, что из истинности этого неравенства при $n = k$ следует его истинность при $n = k + 1$ для любого натурального k и любого $x \in \boldsymbol{R}$, т. е $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$. Имеем

$$|\sin (k+1)x| = |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin kx|\,|\cos x| + |\cos kx|\,|\sin x| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin kx| + |\sin x| \leqslant k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|,$$

т. е. $|\sin (k + 1)x| \leqslant (k + 1)|\sin x|$, чем и завершается доказательство.

11. $\frac{n}{n+1}$. ● Учтите, что $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. **12.** $\frac{n}{2n+1}$. ● Предел при $n \to +\infty$ равен $\frac{1}{2}$. Учтите, что $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$.

13. $S_n = (n + 1)! - 1$. ● Учтите, что

$$k \cdot k! = (k + 1 - 1)k! = (k + 1)k! - k! = (k + 1)! - k!.$$

14. $\frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$. ▲ Пусть $S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n + 1)x^n$, тогда

$$Sx = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + (n + 1)x^{n+1},$$
$$S - Sx = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - (n + 1)x^{n+1},$$

или

$$S(1-x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^{n+1}.$$

Окончательно находим

$$S=\frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

15. а) $\dfrac{x[1-(n+1)x^{2n}+nx^{2n+2}]}{(1-x^2)^2}$; б) $\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x^n(x-1)^2}$.

§ 2. КОМБИНАТОРИКА. БИНОМ НЬЮТОНА

1. $x=5$. ▲ Имеем $3\dfrac{(x+1)x}{2}-2\dfrac{x(x-1)}{2!}\cdot 2!=x \Leftrightarrow x(x-5)=0$. Так как $x\in N$, то $x=5$.

2. $x=4$. ▲ Имеем $\dfrac{(x+1)x(x-1)}{3!}\cdot 3!+\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!(x+1-(x-1))}=$ $=14(x+1)$. Решив уравнение, находим $x_1=-\dfrac{7}{2}$, $x_2=-1$, $x_3=4$. Учитывая, что $x\in N$, получим $x=4$.

3. $x=9$. **4.** $x=3$. **5.** $x=7$. ● Из условия следует уравнение $(x+3)(x+2)(x+1)=720$. Воспользуйтесь тем, что на множестве натуральных чисел функция $f(x)=(x+3)(x+2)(x+1)$ возрастает, и найдите решение подбором.

6. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. **7.** $n>4$. **8.** $\{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. **9.** $\{8; 9; 10; \ldots\}$.

10. $x\geqslant 2$, $x\in N$. ▲ Так как $C_{x+1}^{x-1}=C_{x+1}^{2}$, то данное неравенство примет вид $\dfrac{(x+1)x}{2}>\dfrac{3}{2}$, или $x^2+x-3>0$, откуда $x\in\left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}; +\infty\right)$. Согласно условию, $x\in N$, поэтому x — любое целое число, большее или равное 2. **11.** Три члена. **12.** Четыре члена. **13.** mnk треугольников.

14. $2\cdot(P_5)^2=2\cdot(120)^2$ способами.

▲ Чтобы никакие два мальчика не сидели рядом и никакие две девочки не сидели рядом, нужно мальчиков и девочек рассадить через одного. При этом девочек можно посадить P_5 способами и мальчиков также P_5 способами. Кроме того, мальчиков и девочек можно поменять местами. Поэтому всего будет $2 \cdot (P_5)^2$ способов. **15.** $A_{10}^3 = 720$ способами. **16.** $C_9^5 = 126$ способами. **17.** $(C_8^3 - 6)P_3P_5 = 36\,000$ способами. **18.** $A_3^2 \cdot A_5^4 = 720$ чисел. **19.** $A_9^5 = 15\,120$ чисел. **20.** 576 чисел. **21.** $C_7^2 \cdot 2^5 = 672$ числа.

22. 261 972 способа. ▲ Букет может быть составлен из 3, 4, ..., 18 различных цветков. Это можно сделать $A = C_{18}^3 + C_{18}^4 + ... + C_{18}^{18}$ различными способами. Учитывая, что $C_{18}^0 + C_{18}^1 + C_{18}^2 + ... + C_{18}^{18} = 2^{18}$, т. е. $1 + 18 + 153 + A = 2^{18} = 262\,144$, получим $A = 262\,144 - 172 = 261\,972$. **23.** 840 чисел. **24.** $45 \cdot 10^4$ чисел. ● Учтите, что количество шестизначных чисел с четной суммой цифр равно количеству таких чисел с нечетной суммой цифр. Всего же имеется $9 \cdot 10^5$ шестизначных чисел. **25.** 15 участников; 156 партий. **26.** $T_5 = 252$. **27.** $T_6 = 924$. **28.** $T_5 = 252\ x^{-\frac{9}{2}}$. **29.** $T_6 = 84$. **30.** $T_8 = C_{17}^8$. **31.** $T_1 = 14\ a^{\frac{7}{2}}$. **32.** $T_3 = -20x^2$. **33.** $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-\frac{5}{3}}$.

34. ● Перемножьте почленно равенства

$$(x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n,$$

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n,$$

разложите $(1 + x)^{2n}$ по формуле бинома и приравняйте коэффициенты при x^n. **35.** $n = 13$. ● Воспользуйтесь тем, что $\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}(x + 2)^n$, и решите задачу для бинома $(x + 2)^n$. **36.** $C_{24}^4 + 3C_{12}^1 \cdot C_{22}^2 + 9\ C_{12}^2$. ▲ Имеем $(1 - 2x + 4x^2)^{12} = [(1 - x)^2 +$

$+ 3x^2]^{12} = [(1-x)^2]^{12} + C_{12}^1[(1-x)^2]^{11} \cdot 3x^2 + C_{12}^2[(1-x)^2]^{10} \times$

$\times 9x^4 + \ldots = (1-x)^{24} + C_{12}^1(1-x)^{22} \cdot 3x^2 + C_{12}^2(1-x)^{20} \cdot 9x^4 + \ldots =$

$= (1 - C_{24}^1 x + C_{24}^2 x^2 - C_{24}^3 x^3 + C_{24}^4 x^4 - \ldots) + 3C_{12}^1 x^2(1 - C_{22}^1 x +$

$+ C_{22}^2 x^2 - \ldots) + 9x^4 C_{12}^2 (1 - C_{20}^1 x + \ldots)$. Из этого разложения следует, что коэффициент при x^4 в данном разложении равен $C_{24}^4 +$

$+ 3C_{12}^1 \cdot C_{22}^2 + 9C_{12}^2$. **37.** $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$. ▲ $T_3 = C_6^3\, x^{\frac{3}{2(\lg x + 1)}} \times$

$\times x^{\frac{1}{4}} = 200$, $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2(\lg x + 1)}\right) \lg x = 1$; $\lg x = -4$, $\lg x = 1$; $x_1 =$

$= 10^{-4}$, $x_2 = 10$.

38. $T_6 = C_{12}^6 \cdot 2^6 \cdot x^6$. ▲ Имеем $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 241 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 - 2n + 2n(n-1) = 241$, $n_1 = -10$, $n_2 = 12$. Условию удовлетворяет $n = 12$. Далее, так как

$T_k = C_{12}^k (x^2)^{12-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k$, то $2(12-k) - k = 6$, $k = 6$. Отсюда получаем ответ. **39.** Третий член. **40.** $T_{10}^6 = 210$. **41.** 1420.

42. ▲ Применив формулу бинома Ньютона, получим

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (1)$$

Аналогично находим

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2) и учитывая, что $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$ для любого $0 < k < n$, кроме того, x_{n+1} по сравнению с x_n содержит лишний положительный член суммы, заключаем, что $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

43. ▲ Справедливость данного неравенства следует из выражения (1) (см. решение задачи 42).

44. ▲ Каждая разность в круглых скобках в выражении (1) (см. решение задачи 42) меньше единицы. Учитывая также, что $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ при $k > 2$, получим

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

45. ▲ Разделив обе части доказываемого неравенства на n^n, получаем равносильное неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$. Согласно доказанному в задаче 44, неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ справедливо при всех $n \in \boldsymbol{N}$, следовательно, неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ верно при всех натуральных $n \geqslant 3$.

§ 3. НЕСТАНДАРТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1. а) $\{-11\}$; б) $\{2\}$; в) $\{3\}$; г) $\{0\}$. **2.** *а*) $x \in \left\{\frac{5\pi}{12} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi l \mid k, l \in \boldsymbol{Z}\right\}$. ▲ Заметим, что подкоренное выражение является полным квадратом:

$$3 - 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x =$$
$$= 3(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x =$$
$$= \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 3\cos^2 x =$$
$$= (\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 = \left[2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]^2.$$

Поэтому исходное уравнение примет вид

$$\left| 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right| \cdot \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения, учитывая знак $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Рассмотрим два случая: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$ и $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 0$.

При $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$ последовательно преобразуя уравнение (1), имеем

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда

$$x = -\frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

С учетом того, что $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$, остаются лишь решения

$$x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

При $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 0$ после аналогичных преобразований уравнения (1) получаем

$$-2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 > 1, \text{ т. е. решений нет.}$$

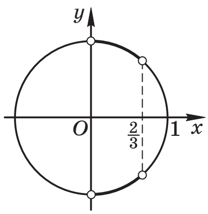


Рис. 112

Итак решениями уравнения являются серии корней (2);

б) $x \in \left\{-\frac{\pi}{8} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{8} + 2\pi k \ \middle|\ n,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $x \in \{2\pi n | \ n \in \boldsymbol{Z}\}$; г) $x \in \left\{(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{6} + \right.$

$\left. + \pi n \ \middle|\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **3.** а) $x \in \left\{-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$. ▲ Найдем область определения исходного уравнения (рис. 112):

$$\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geqslant 0; \\ \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1; \\ 1 - \dfrac{3\cos x}{2} > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |x| \leqslant \pi, \\ 0 < \cos x < \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Поэтому $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ -\arccos\frac{2}{3}\right) \cup \left(\arccos\frac{2}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 112).

На этом множестве первый сомножитель $(\sqrt{\pi^2 - x^2})$ не обращается в нуль, следовательно, в области определения исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_{\cos x}\left(1 - \frac{3\cos x}{2}\right) - 2 = 0.$$

Последовательно преобразуя его, имеем

$$\log_{\cos x}\left(1 - \frac{3\cos x}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3\cos x}{2} = \cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -2, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

В полученной совокупности уравнений первое уравнение $(\cos x = -2)$ не имеет решений, а из всех решений второго уравнения $\left(x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\right)$ отберем такие решения, которые принадлежат области определения, т. е. $x = \pm\frac{\pi}{3}$; б) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$;

в) $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$; г) $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$.

4. а) $\varnothing$ при $a \in (-\infty; -1)$; два корня при $a \in (0; +\infty) \cup \{-1\}$; три корня при $a \in \{0\}$; четыре корня при $a \in (-1; 0)$.

● Постройте график функции $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$ и найдите число точек его пересечения с прямой $y = a$ при различных значениях a;

б) $\varnothing$ при $a \in (-\infty; -27)$; один корень при $a \in \{-27\}$; два корня при $a \in (-27; 0) \cup (5; +\infty)$; три корня при $a \in \{0; 5\}$; четыре корня при $a \in (0; 5)$;

в) один корень при $a \in (-\infty; -8)$; два корня при $a \in \{-8; 19\}$; три корня при $a \in (-8; 19)$. **5.** а) $\{(\operatorname{tg} a; 2; \ln(2a-1))\}$ при $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\varnothing$ при $a \notin \left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\{(1; e^a; \pi n + (-1)^n \arcsin(a+1) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; $(1; -e^a; \pi n + (-1)^n \times$ $\times \arcsin(a+1)) \mid n \in \boldsymbol{Z}$ при $a \in [-2; 0]$, $\varnothing$ при $a \notin [-2; 0]$.

в) $\{((a-3)^2; \cos(a-2); 3|\}$ при $a \in [3; \pi + 2]$; $\varnothing$ при $a \notin [3; \pi + 2]$. **6.** а) $y = 2x - 1$, точки касания $(0; -1)$ и $(1; 1)$; $y = 0$, точки касания $(0; 0)$ и $(1; 0)$;

б) $y = -2x + 2$, точки касания $(0; 2)$ и $(-1; 4)$; $y = -4x + 1$, точки касания $(-1; 5)$ и $(0; 1)$;

в) $y = 2x + 3$, точки касания $(1; 5)$ и $(-1; 1)$; $y = -\frac{10}{3}x + \frac{11}{9}$, точки касания $\left(-\frac{5}{3}; \frac{61}{9}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$.

7. а) $c = 3$. ▲ Обозначим через K и M точки касания одной общей касательной к параболам

$y = -x^2 + 5x + 1$ и $y = x^2 + bx + c$, а через L и N — точки касания другой общей касательной к этим параболам (рис. 113) и найдем выражение для площади S четырехугольника $KLMN$ через параметры b и c.

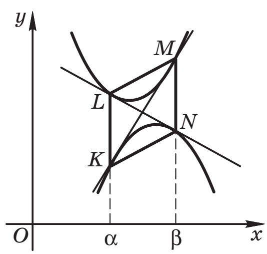


Рис. 113

Пусть $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ — координаты точек касания какой-либо общей касательной к первой и второй параболе соответственно. Уравнение касательной к первой параболе в точке $(x_1;\ y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = (-2x_1 + 5)(x - x_1),$$

откуда, учитывая, что $y_1 = -x_1^2 + 5x_1 + 1$, получим

$$y = (-2x_1 + 5)x + x_1^2 + 1.$$

Уравнение касательной ко второй параболе в точке $(x_2;\ y_2)$ имеет вид $y - y_2 = (2x_2 + b)(x - x_2)$, откуда, учитывая, что $y_2 = x_2^2 + bx_2 + c$, получим $y = (2x_2 + b)x + c - x_2^2$.

Условие совпадения касательных приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 5 = 2x_2 + b, \\ x_1^2 + 1 = c - x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{5-b}{2}, \\ x_1^2 + x_2^2 = c - 1, \end{cases}$$

из которой следует, что величины x_1 и x_2 удовлетворяют квадратному уравнению

$$x^2 - \frac{5-b}{2}x + \frac{(5-b)^2}{8} - \frac{c-1}{2} = 0. \qquad (1)$$

Рассматриваемая система является симметричной и имеет два различных решения, а значит, существуют две различные общие касательные к данным параболам тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения (1) положителен:

$$D = 2(c-1) - \frac{(5-b)^2}{4} > 0.$$

Предполагая, что это условие выполнено, находим корни уравнения (1):

$$\alpha = \frac{5-b}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \beta = \frac{5-b}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{D}$$

и, соответственно, два решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = \beta, \\ x_2 = \alpha. \end{cases}$$

Поэтому абсциссы вершин четырехугольника $KLMN$ равны $x_K = \alpha$, $x_M = \beta$, $x_N = \beta$, $x_L = \alpha$.

Так как $x_K = x_L$ и $x_M = x_N$, то противоположные стороны KL и MN четырехугольника лежат на параллельных прямых $x = \alpha$ и $x = \beta$, а значит, $KL \parallel MN$.

Вычислим длину стороны KL, равную разности ординат вершин K и L:

$$KL = y_L - y_K = x_L^2 + bx_L + c - (-x_K^2 + 5x_K + 1) =$$

$$= \alpha^2 + \beta\alpha + c + \alpha^2 - 5\alpha - 1 = \left(2\alpha^2 - \frac{(5-b)^2}{8} + \frac{c+1}{2}\right).$$

Учитывая, что α — один из корней уравнения (1), имеем $\alpha^2 - \frac{5-b}{2}\alpha = \frac{c-1}{2} - \frac{(5-b)^2}{8}$; следовательно,

$$KL = 2\left(\frac{c-1}{2} - \frac{(5-b)^2}{8} + \frac{c+1}{2}\right) = 2(c-1) - \frac{(5-b)^2}{4} = D.$$

Аналогично можно показать, что $MN = D$. Значит, $KL = MN$ и четырехугольник $KLMN$ является параллелограммом. Так как $\beta - \alpha = \sqrt{D}$, то

$$S = KL \cdot (x_M - x_K) = KL \cdot (\beta - \alpha) = D^{\frac{3}{2}},$$

т. е. $S = \left(2(c-1) - \frac{(5-b)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$. Так как по условию площадь $S = 8$, то $2(c-1) - \frac{(5-b)^2}{4} = 4$. Поэтому $c = \frac{(b-5)^2}{8} + 3$, откуда следует, что наименьшее значение параметра c соответствует $b = 5$ и равно 3; б) $-\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -12.

8. а) $x \in \left[\frac{7}{2};\, 4\right) \cup [5;\, +\infty)$. ▲ Запишем исходное логарифмическое неравенство в виде

$$\log_{x-3}\sqrt{\frac{5x-17}{2}} \leqslant \log_{x-3}(x-3).$$

Оно равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x-3 < 1,\\ \sqrt{\dfrac{5x-17}{2}} \geqslant x-3,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3 > 1,\\ 0 < \sqrt{\dfrac{5x-17}{2}} \leqslant x-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3 < x < 4,\\ 2x^2 - 17x + 35 \leqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ x > \dfrac{17}{5},\\ 2x^2 - 17x + 35 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3 < x < 4,\\ \dfrac{7}{2} \leqslant x \leqslant 5,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ \left[\begin{array}{l}x \leqslant \dfrac{7}{2},\\ x \geqslant 5\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{7}{2} \leqslant x < 4,\\ x \geqslant 5.\end{array}\right.$$

б) $x \in \left[-\frac{3}{2};\, -1\right) \cup [2;\ +\infty)$; в) $x \in \left(\frac{7}{5};\, \frac{3}{2}\right] \cup (2;\ 3]$; г) $x \in \left[-\frac{4}{3};\, -1\right) \cup (0;\, 4)$. **9.** а) $x \in [\sqrt{2};\, 2]$. ▲ Заметим, что

$$\log_{x^2}\frac{2}{x^2} = \log_{|x|^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{|x|}\right)^2 = \log_{|x|}\frac{\sqrt{2}}{|x|} = \log_{|x|}\sqrt{2} - 1.$$

и перепишем исходное неравенство в виде

$$a + b < \sqrt{ab}\,, \qquad (1)$$

где

$$a = a(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x+2}\,,\ b = b(x) = \frac{\log_{|x|}\sqrt{2} - 1}{x+2}\,.$$

Записав область определения неравенства (1):

$$\begin{cases} a(x)b(x) \geqslant 0, \\ x \neq 0,\ x \neq \pm 1,\ x \neq -2, \end{cases}$$

сразу заметим, что в этой области неравенство выполняется при любых отрицательных a и b, так как в этом случае $a + b < < 0 < \sqrt{ab}$, и нарушается при любых положительных a и b в силу очевидных неравенств $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} > \sqrt{ab}$. Поскольку величины a и b не могут иметь разные знаки (их произведение находится под знаком квадратного корня), очевидно, еще возможны лишь случаи, когда одна из них равна нулю, а другая является отрицательной.

Итак, рассмотрим следующие три случая:

$$1)\ \begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ 1 < x < 2, \end{array}\right. \\ \dfrac{\log_{|x|}\sqrt{2} - \log_{|x|}|x|}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2, \\ \log_{|x|}\sqrt{2} - \log_{|x|}|x| > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2, \\ \log_{|x|}\sqrt{2} - \log_{|x|}|x| < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ |x| < \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2, \\ |x| > \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{2} < x < 2;$$

$$2)\ \begin{cases} a = 0, \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ \dfrac{\log_{|x|}\sqrt{2} - 1}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2;$$

$$3)\ \begin{cases} a < 0, \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ \dfrac{\log_{|x|}\sqrt{2} - 1}{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ 1 < x < 2, \end{array}\right. \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2},$$

Объединяя найденные решения, получаем ответ.

б) $x \in (0;\ 1) \cup \{2\}$; в) $x \in [-1{,}5;\ -1) \cup [2;\ +\infty)$; г) $x \in [-2;\ -1) \cup \cup [2;\ +\infty)$.

10. а) $a \in (3 - 2\sqrt{5};\ +\infty)$. ▲ Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1;\ 1]$; тогда исходное неравенство примет вид

$$f(t) = t^2 - (a+1)t + 2a + 3 > 0, \qquad (1)$$

причем неравенство (1) должно выполняться для всех $t \in [-1;\ 1]$.

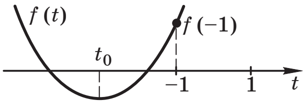


Рис. 114

График функции $f(t)$ — парабола с вершиной в точке $t_0 = \frac{a+1}{2}$ и ветвями, направленными вверх.

Если $t_0 < -1$, то неравенство (1) выполняется для всех $t \in [-1; 1]$ тогда и только тогда, когда $f(-1) > 0$ (рис. 114), откуда следует, что

$$\begin{cases} t_0 < -1, \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{2} < -1, \\ 1 + (a+1) + 2a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3, \\ a > -\frac{5}{3}, \end{cases}$$

т. е. данный случай невозможен.

Если $-1 \leqslant t_0 \leqslant 1$, то неравенство (1) выполняется для всех $t \in [-1; 1]$, тогда и только тогда, когда $f(t_0) > 0$ (рис. 115), откуда

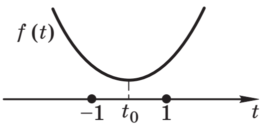


Рис. 115

$$\begin{cases} -1 \leqslant t_0 \leqslant 1, \\ f(t_0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant \frac{a+1}{2} \leqslant 1, \\ -\frac{a^2 - 6a - 11}{4} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant a \leqslant 1, \\ a^2 - 6a - 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant a \leqslant 1, \\ 3 - 2\sqrt{5} < a < 3 + 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} < a \leqslant 1.$$

Если $t_0 > 1$, то неравенство (1) выполняется для всех $t \in [-1; 1]$ тогда и только тогда, когда $f(1) > 0$ (рис. 116), откуда

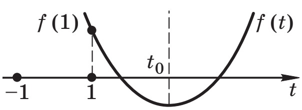


Рис. 116

$$\begin{cases} t_0 > 1, \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{2} > 1, \\ 1 - (a+1) + 2a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a > -3 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1.$$

Объединив множества значений параметров, найденные в трех рассмотренных выше случаях, получим ответ.

б) $b \in (1; +\infty)$; в) $c \in (5 - 2\sqrt{7}; +\infty)$; г) $p \in (3 - 2\sqrt{2}; +\infty)$.

11. а) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. ▲ Для функции $f(x) = 6x^2 + 2x + 6$ ее производная $f'(x) = 12x + 2$, а первообразная $F(x) =$

$= 2x^3 + x^2 + 6x + C$, где C — постоянная, подлежащая определению. По условию графики функций $y = f(x)$ и $y = F(x)$ касаются в некоторой точке $M_0\ (x_0;\ y_0)$, причем $x_0 > 0{,}7$. Касание графиков функции $f(x)$ и ее первообразной $F(x)$ означает совпадение ординат и угловых коэффициентов касательных к указанным графикам в этой точке. Поэтому условия касания в точке M_0 имеют вид

$$\begin{cases} f(x_0) = F(x_0), \\ f'(x_0) = F'(x_0) = f(x_0), \\ x_0 > 0{,}7. \end{cases}$$

Выполним равносильные преобразования этой системы:

$$\begin{cases} 6x_0^2 + 2x_0 + 6 = 2x_0^3 + x_0^2 + 6x_0 + C, \\ 12x_0 + 2 = 6x_0^2 + 2x_0 + 6, \\ x_0 > 0{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_0^2 + 2x_0 + 6 = 2x_0^3 + x_0^2 + 6x_0 + C, \\ x_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 5, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $F(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 5$, и остается решить неравенство $\dfrac{F(x) - f(x)}{f'(x)} \geqslant 0$, которое с помощью разложения на множители преобразуется к виду

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{12x + 2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x + \frac{1}{6}} \geqslant 0.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получим ответ. б) $x \in \left(-2;\ \frac{9}{2}\right) \cup \{-3\}$; в) $x \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right] \cup (-2;\ 1) \cup \{2\}$; г) $x \in (-1;\ 0] \cup (3;\ +\infty)$.

12. Прямая $y = -\dfrac{1}{4a}$. ▲ Возьмем произвольную точку $(x_0;\ ax_0^2)$ на параболе, отличную от начала координат (так как касательная в начале координат не имеет перпендикулярной к ней другой касательной) и проведем касательную в этой точке (рис. 117). Ее уравнение имеет вид

$$y = ax_0^2 + 2ax_0(x - x_0), \text{ или } y = 2ax_0x - ax_0^2. \qquad (1)$$

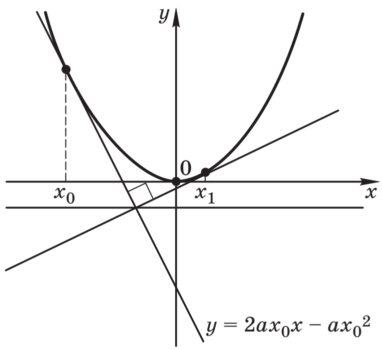


Рис. 117

Угловой коэффициент касательной равен $k = 2ax_0$.

Запишем теперь уравнение касательной к данной кривой в точке $(x_1;\ ax_1^2)$:

$$y = 2ax_1x - ax_1^2. \qquad (2)$$

Найдем такую точку $(x_1;\ ax_1^2)$ на данной кривой, чтобы касательные (1) и (2) были перпендикулярны. Из условия перпендикулярности двух прямых следует, что $2ax_1 = -\frac{1}{2ax_0} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4a^2x_0}$, т. е. перпендикулярная касательная проходит через точку с координатами $\left(-\frac{1}{4a^2x_0};\ \frac{1}{16a^3x_0^2}\right)$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$y = -\frac{2a}{4a^2x_0}x - a\frac{1}{16a^4x_0^2},$$

или

$$y = -\frac{1}{2ax_0} \cdot x - \frac{1}{16a^3x_0^2}. \qquad (3)$$

Найдем точку пересечения касательных (1) и (3). Имеем

$$2ax_0x - ax_0^2 = -\frac{1}{2ax_0}x - \frac{1}{16a^3x_0^2},$$

откуда получаем абсциссу точки пересечения касательных:

$$x = \frac{4a^2x_0^2 - 1}{8a^2x_0}. \qquad (4)$$

Подставив выражение (4) в равенство (1), находим ординату точки пересечения касательных:

$$y = 2ax_0 \cdot \frac{4a^2x_0^2 - 1}{8a^2x_0} - ax_0^2 = \frac{4a^2x_0^2 - 1}{4a} - ax_0^2 =$$

$$= \frac{4a^2x_0^2 - 1 - 4a^2x_0^2}{4a} = -\frac{1}{4a}.$$

Итак, ордината точки пересечения не зависит от x_0, т. е. все точки пересечения лежат на прямой $y = -\frac{1}{4a}$, которая и является геометрическим местом точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных. Действительно, как мы показали, все точки пересечения перпендикулярных касательных лежат на прямой $y = -\frac{1}{4a}$. Обратно, какова бы ни была точка с произвольной абсциссой x, принадлежащая прямой $y = -\frac{1}{4a}$, уравнение (4) относительно x_0 будет иметь два решения (так как дискриминант $D = 16a^2(4x^2 + 1) > 0$). Поэтому существуют две взаимно перпендикулярные касательные, проходящие через точку $\left(x; -\frac{1}{4a}\right)$.

Замечание 1. Так как любую параболу вида $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ с помощью переноса системы координат в произвольную точку можно в этих новых координатах записать в виде $y = ax^2$, то полученный результат верен (с соответствующим сдвигом) для всех парабол указанного вида.

Замечание 2. В процессе решения задачи не использовалось условие $a > 0$, а лишь условие $a \neq 0$. Этот же результат справедлив и для любой параболы вида $y = -ax^2$ $(a > 0)$ а, следовательно, и для всех парабол вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Итак, для любой параболы геометрическое место точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных — это прямая, параллельная оси абсцисс.

13. $\frac{1}{4}$. ▲ Положим в предыдущей задаче $a = 1$. Имеем $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB$ (рис. 118). Запишем координаты вершин треугольника: $A(x_0;\ x_0^2)$, $B\left(-\frac{1}{4x_0};\ \frac{1}{16x_0^2}\right)$, $C\left(\frac{4x_0^2-1}{8x_0};\ -\frac{1}{4}\right)$. Следовательно, $AC = \frac{(4x_0^2+1)^{\frac{3}{2}}}{8|x_0|}$; $CB = \frac{(4x_0^2+1)^{\frac{3}{2}}}{16x_0^2}$, откуда

$$S_{\Delta ABC} = S(x_0) = \frac{(4x_0^2+1)^3}{16^2 x_0^3} = \frac{1}{16^2} \cdot \left(\frac{4x_0^2+1}{x_0}\right)^3.$$

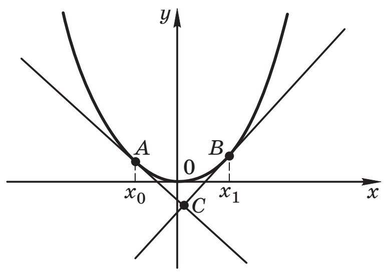


Рис. 118

Эта функция достигает наименьшего значения одновременно с функцией

$$f(x_0) = \frac{4x_0^2+1}{x_0} = 4x_0 + \frac{1}{x_0}.$$

С помощью производной находим точку минимума этой функции: $x_0 = \frac{1}{2}$. Итак,

$$\min S(x) = S(x_0) = \frac{1}{16^2} \cdot \left(\frac{2}{0{,}5}\right)^3 = \frac{1}{16^2} \cdot 4^3 = \frac{1}{4}.$$

§ 4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. а) 6; б) 4; в) 18; г) 10. **2.** а) 4; б) 4; в) 2; г) 2; д) 2. **3.** а) −1; б) 2; в) $\sqrt{a}$; г) 1; д) $\frac{1}{2bc}$; е) 1; ж) 1. **4.** а) −1; б) 3; в) −1; г) −2; д) 1; е) −2. **5.** 1. **6.** а) $3-2\sqrt{x-1}$, если $1 \leqslant x < 2$; 1, если $2 \leqslant x \leqslant 5$; $2\sqrt{x-1}-3$, если $x > 5$;

б) $5-2\sqrt{x-1}$, если $2 \leqslant x < 6$; 1, если $6 \leqslant x \leqslant 11$; $2\sqrt{x-2}$, если $x \geqslant 11$;

в) 2, если $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $2\sqrt{x+1}$, если $x > 0$.

§ 5. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. ▲ Имеем $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \Rightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Очевидно, равенство достигается лишь при $a = b$.

4. ▲ Используя неравенство, доказанное в задаче 1, получим

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

5. ● В неравенстве, доказанном в задаче 4, положите $d = \frac{a+b+c}{3}$.

6. ▲ а) Доказательство проведем методом математической индукции. Докажем, что неравенство выполняется при $n = 2$. Так как $\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}$ (см. задачу 1) и по условию $x_1x_2 = 1$, то $\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant 1$, т. е. $x_1 + x_2 \geqslant 2$.

Равенство $\frac{x_1+x_2}{2} = \sqrt{x_1x_2}$ имеет место лишь при $x_1 = x_2$, поэтому равенство $x_1 + x_2 = 2$ достигается лишь при $x_1 = x_2 = 1$.

Допустим, что неравенство выполняется при $n = k$. Докажем, что тогда неравенство выполняется и при $n = k + 1$. Возьмем любые положительные числа $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, удовлетворяющие условию $x_1 \ldots x_k x_{k+1} = 1$. Если $x_1 = \ldots = x_k = x_{k+1} = 1$, то $x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1$ и доказываемое нестрогое неравенство выполняется.

Если же не все эти числа равны 1, то среди них найдется число, меньшее 1, и число, большее 1. Допустим, что $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$. Так как произведение k положительных чисел $x_1 \ldots x_k x_{k+1} = 1$, то согласно сделанному предложению их сумма

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + (x_k x_{k+1}) \geqslant k.$$

Тогда, учитывая, что $x_1 + \ldots + x_{k-1} \geqslant k - x_k x_{k+1}$, получаем

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geqslant$$
$$\geqslant k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > k + 1,$$

так как $(x_k - 1) > 0$, $(1 - x_{k+1}) > 0$. Неравенство доказано.

б) Положим

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} = y_1 (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$y_1 y_2 \ldots y_n = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n})^n} = 1.$$

Согласно доказанному, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geqslant n$, следовательно,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} \geqslant n, \text{ т. е. } \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Неравенство Коши доказано.

8. ▲ В силу неравенства Коши имеем $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Далее, легко доказать, что $a_k a_{n-k+1} \geqslant a_1 a_n$, поэтому

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \ldots (a_n a_1) \geqslant (a_1 a_n)^n,$$

или

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \sqrt{a_1 a_n}.$$

В частности, если положить $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$, то получим неравенство $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$.

9. ▲ Имеем

а) $$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}} = \sqrt[n(n-1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}} < \sqrt[n(n-1)]{\frac{3}{n}} \leqslant 1$$

при $n > 3$;

б) $$\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n-1]{n}} = \sqrt[n(n-1)]{\frac{(n+1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}} = \sqrt[n(n-1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}} =$$

$$= \sqrt[n(n-1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1}} < \sqrt[n(n-1)]{\frac{3}{n+1}} \leqslant 1 \text{ при } n > 2.$$

12. ▲ Имеем

$$1 + a_1 > 2\sqrt{1 \cdot a_1}\,,\ 1 + a_2 > 2\sqrt{1 \cdot a_2}\,,\ \ldots,\ 1 + a_n > 2\sqrt{1 \cdot a_n}\,.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим искомое неравенство.

13. ▲ Рассмотрим выражение $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_ix + b_i)^2$, являющееся квадратным трехчленом $Ax^2 + 2Bx + C$, где

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,,\quad B = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i,\quad C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2\,.$$

При всех действительных значениях x справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ix + b_i)^2 = Ax^2 + 2Bx + C > 0,$$

следовательно, дискриминант $B^2 - AC \leqslant 0$, т. е.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2\,.$$

Если $a_i = kb_i(l = 1, 2, \ldots n)$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} kb_i^2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} k^2b_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2\,.$$

14. ▲ Дана геометрическая прогрессия $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$ и арифметическая прогрессия $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + d(n - 1), \ldots$ такие, что

$$a > 0;\ aq = a + d > 0;\ a \neq aq. \qquad (1)$$

Нужно доказать, что

$$aq^{n-1} > a + d(n-1),$$

иначе

$$aq^{n-1} - a - d(n-1) > 0 \text{ для } n = 3, 4 \ldots .$$

Из условий (1) следует:

$$d = a(q-1),\ 0 < q \neq 1.$$

Поэтому

$$aq^{n-1} - a - d(n-1) = aq^{n-1} - a - a(q-1)(n-1) =$$
$$= a\{q^{n-1} - 1 - (q-1)(n-1)\}.$$

Таким образом, задача сводится к доказательству неравенства

$$q^{n-1} - 1 - (q-1)(n-1) > 0,\ n = 3, 4, \ldots \qquad (2)$$

для значений $0 < q < 1$ и $q > 1$.

Учитывая, что

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} = \frac{q^{n-1} - 1}{q-1};$$

откуда

$$q^{n-1} - 1 = (q-1)(1 + q + \ldots + q^{n-2}),$$

получаем

$$q^{n-1} - 1 - (q-1)(n-1) = (q-1)(q^{n-2} + \ldots + q + 1) -$$
$$- (q-1)(n-1) = (q-1)(q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 2 - n) > 0.$$

Действительно, если $0 < q < 1$, то $q - 1 < 0$, $q^{n-2} + \ldots + q + 2 - n < 0$; если же $q > 1$, то $q - 1 > 0$, $q^{n-2} + \ldots + q + 2 - n > 0$.

Докажем неравенство (2) другим способом — методом математической индукции. Это неравенство справедливо при $n = 3$, так как $q^2 - 1 - (q-1)(3-1) = (q-1)^2$ и по условию $q \neq 1$. Допустим, что неравенство (2) выполняется при $n = k$, где k — произвольное натуральное число, $k > 3$, т. е.

$$q^{k-1} - 1 - (q-1)(k-1) > 0. \qquad (3)$$

Докажем, что из справедливости неравенства (2) при $n = k$ следует его справедливость при $n = k + 1$. В самом деле, при $n = k + 1$, учитывая неравенство (3) и условия $k > 3$, $q \neq 1$, имеем

$$q^k - 1 - (q-1)k = q^k - q^{k-1} + q^{k-1} - 1 - (q-1)[(k-1) + 1] =$$
$$= q^{k-1}(q-1) + [q^{k-1} - 1 - (q-1)(k-1)] - (q-1) =$$
$$= (q-1)(q^{k-1} - 1) + [q^{k-1} - 1 - (q-1)(k-1)] > 0,$$

что и требовалось доказать.

15. ▲ После преобразований исходное равенство примет вид

$$(a + b)(a + c)(b + c) = 0. \qquad (1)$$

Аналогично доказываемое равенство приводится к виду

$$(a^n + b^n)(a^n + c^n)(b^n + c^n) = 0. \qquad (2)$$

При нечетном n из равенства (1) следует (2), так как если, например, $a + b = 0$, то $a = -b$ и

$$a^n + b^n = a^n + (-a)^n = 0$$

а из равенства (2) следует справедливость доказываемого соотношения.

16. ● Представьте левую часть уравнения в виде

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

18. ▲ Пусть m — целый корень алгебраического уравнения $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, коэффициенты которого — целые числа. Подставив m вместо x, получим числовое равенство $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0$. Разделим обе части этого равенства на m:

$$a_n m_{n-1} + a_{n-1} m^{n-2} + \dots + a_1 = -\frac{a_0}{m}.$$

Левая часть последнего равенства — число целое, так как является суммой произведений целых чисел, следовательно, и правая часть равенства — число целое, т. е. частное от деления a_0 на m есть число целое.

19. ▲ Допустим противное. Возможны два случая: корень может быть несократимой дробью или целым числом.

I случай. Пусть $x = \frac{m}{k}$ — корень уравнения, где m, k — целые числа, $k \neq \pm 1$, дробь несократимая. Подставляя $\frac{m}{k}$ в уравнение, получаем числовое равенство

$$\left(\frac{m}{k}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{m}{k}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{m}{k} + 1 = 0.$$

Умножив это равенство на k^{n-1}, имеем

$$\frac{m^n}{k} = -a_{n-1} m^{n-1} - \dots - a_1 m k^{n-2} - k^{n-1}.$$

В левой части полученного выражения — несократимая дробь, в правой части — целое число, следовательно, равенство невозможно. Итак, несократимая дробь не может быть корнем уравнения.

II случай. Пусть $x = m$ — корень уравнения, где m — целое число, $m \neq \pm 1$. Подставляя m в уравнение, получаем числовое равенство

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + 1 = 0.$$

Разделив его на m, имеем

$$m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \ldots + a_1 = -\frac{1}{m}.$$

Это равенство невозможно, так как левая часть выражения есть число целое, а правая часть — число дробное. Следовательно, сделанное допущение неверно.

21. ▲ Подставив в уравнение $x = \frac{p}{q}$ и умножив на q^n, получим

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0, \qquad (1)$$

откуда

$$a_0 q^n = p(-a_n p^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \ldots - a_1 q^{n-1}),$$

или

$$\frac{a_0 q^n}{p} = -a_n p^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \ldots - a_1 q^{n-1}.$$

Правая часть равенства — число целое, следовательно, произведение $a_0 q^n$ делится на p, а так как p и q взаимно просты, то a_0 делится на p.

Далее, запишем равенство (1) в виде

$$\frac{a_n p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_0 q^{n-1}.$$

Проведя те же рассуждения, что и выше, докажем, что a_n делится на q.

25. ▲ Имеем

$$2^{105} + 3^{105} = (2^3)^{35} + (3^3)^{35} = 8^{35} + 27^{35} =$$
$$= (8 + 27)(8^{34} - 8^{33} \cdot 27 + \ldots + 27^{34}),$$

следовательно, $2^{105} + 3^{105}$ делится на 35. Аналогично доказываются и другие утверждения.

28. б) ▲ Преобразуем доказываемое неравенство:

$$\frac{1}{\log_2\pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} - 2 =$$

$$= \frac{1}{\log_2\pi} + \log_2\pi - 2 = \frac{\log_2^2\pi - 2\log_2\pi + 1}{\log_2\pi} = \frac{(\log_2\pi - 1)^2}{\log_2\pi} > 0,$$

так как $\log_2\pi \neq 1$ и $\log_2\pi > 0$.

30. ▲ Выполним следующие преобразования:

$$x^{10} - x^7 + x^4 - x^2 + 1 = x^4\left(x^6 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 1\right) + \frac{x^4}{2} =$$

$$= x^4\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2 + \frac{x^4}{2} > 0,$$

что и требовалось установить.

Оглавление

Учебное издание

Поступающим в вузы

Дыбов Петр Тимофеевич
Осколков Владимир Александрович

Задачи по математике
(с указаниями и решениями)

Ведущий редактор *О. А. Фёдорова*
Редактор *А. М. Суходский*
Младший редактор *О. А. Шерстнёва*
Корректор *Е. В. Морозова*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Подписано в печать 30.05.2006. Формат 84x108 $^1/_{32}$.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 24,36. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 38/25.
Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (495) 310-75-25, 110-02-50.
Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.
109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (495) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54.
E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru